

名古屋工業大学 正員 松浦 聖
日本下水道事業団 正員 木全 隆
名古屋工業大学大学院 学生員 中山 元

1. まえがき 本報告は、剛性の高い2枚の表板と、それらにはさまれた軽量な心材からなる、三層のサンドイッチ構造をもつ平面骨組構造、特に、ラーメンアーチの非線形変形について解析を行なう。解析法は、荷重増分法による有限要素法を用いる。なお、ここにおいて、“非線形”とは、幾何学的非線形のみを対象とし、材料に関しては、弾性域内にあるものとする。

2. 歪-変位関係および、応力-歪関係

図-1 に示すようなサンドイッチ構造の変形を考える。歪成分は、次のようになる。^{*}(K :各層の指標)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}_K = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ 2e_{xz} \end{Bmatrix}_K + \begin{Bmatrix} \eta_{xx} \\ 2\eta_{xz} \end{Bmatrix}_K \quad (K=1, 2, 3) \quad (1)$$

式(1)で、右辺第一項は、歪の線形成分、第二項は、歪の非線形成分を示す。各歪成分は、各層の中央面での歪と曲率を用いると、式(1)は、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}_K = \begin{Bmatrix} e_{xx}^{(0)} \\ 2e_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix}_K + \zeta_K \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ 0 \end{Bmatrix}_K + \begin{Bmatrix} \eta_{xx}^{(0)} \\ 2\eta_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix}_K + \zeta_K \begin{Bmatrix} w_{xx} \\ 0 \end{Bmatrix}_K \quad (K=1, 2, 3) \quad (2)$$

図-1 に示す量を用いて、式(2)を書くと、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{dw}{dx} \\ 0 \end{Bmatrix} + \zeta_1 \begin{Bmatrix} \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d^2w}{dx^2} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{dw}{dx})^2 \\ (\zeta_1 - \frac{dw}{dx}) \frac{dw}{dx} \end{Bmatrix} + \zeta_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}_{2,3} = \begin{Bmatrix} \frac{dw}{dx} \pm \frac{d}{2}(\zeta_2 \frac{d^2w}{dx^2} + \zeta_3 \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d^2w}{dx^2}) \\ \zeta_3 \end{Bmatrix} + \zeta_{2,3} \begin{Bmatrix} \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d^2w}{dx^2} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{dw}{dx})^2 \\ (\zeta_3 - \frac{dw}{dx}) \frac{dw}{dx} \end{Bmatrix} + \zeta_{2,3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

さて、応力-歪関係式は、垂直応力 σ_{xx} 、横せん断応力 τ_{xz} とすれば、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_K = \begin{bmatrix} E_K & 0 \\ 0 & G_K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}_K \quad (5) \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}_K = \begin{Bmatrix} e_{xx}^{(0)} \\ 2e_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix}_K + \zeta_K \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ 0 \end{Bmatrix}_K \quad (K=1, 2, 3) \quad (6)$$

本解析に用いる、線形増分理論において、応力増分は、歪増分の線形成分のみに依存することから、式(6)の表示ができる。また、各層の断面力は、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} b \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xx} \zeta_K \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} d\zeta_K \quad (K=1, 2, 3) \quad (7)$$

3. 有限要素解析

図-2 に示す、サンドイッチ梁要素を考える。自由度は、各節点につき、5個ずつある。変位仮定は、 w に関して3次関数、軸方向変位および、せん断変形については、線形性を仮定する。そこで、次の表示が得られる。

$$\{w \ u \ \zeta_1 \ \zeta_3\}^T = \{\varphi_0 \ \varphi_u \ \varphi_{\zeta_1} \ \varphi_{\zeta_3}\}^T \{w_i \ \theta_i \ u_i \ \zeta_i \ \tau_{\zeta_1} \ w_j \ \theta_j \ u_j \ \zeta_j \ \tau_{\zeta_3}\}^T \quad (8)$$

以上のことを、考慮すれば、線形増分理論における剛性マトリクスは、次のような形で与えられる。

$$\{K\} = \{K_0\} + \{K_g\} \quad \{K\}: 10 \times 10 \text{ マトリクス}$$

-(9)

増分荷重ベクトルは、増分荷重に対して線形とする。そして、各要素ごとの剛性マトリクスおよび、荷重増分ベクトルを、図に示す、傾き α を用いて、全体座標(X-Z)系に変換し、構造全体について、組み立てを行なうと、最終的に、次の形の剛性方程式を得る。

$$\{F\} = [K]\{\tilde{U}\}$$

-(10)

実際に、式(10)を解くにあたっては、構造に、仮想バネを付加することにより、座屈後での解の精度を高める方法である、Augmented Techniqueを用いる。^{**}

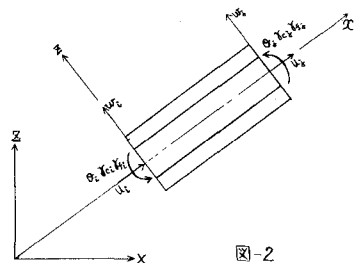


図-2

4. 結果と考察

サンドイッチ構造としては、表板にアルミニウム、心板にアルミニウムハニカムを用いた。ここでは、ラーメン、アーチとも、両端固定、両端ヒンジの2例についての解析を示す。

ラーメン：柱高、梁長は、ともに50cmとする。まず、両端固定の場合、柱と直角方向の荷重 Q に対して、柱の軸方向荷重 P の、 $1/200$ 、 $1/100$ 、および、 $1/50$ の3通りについて考えた。その各々の場合に対する座屈荷重は、それぞれ、670.70kg、666.84kg、669.17kgである。両端ヒンジの場合 Q に対して、 $P/200$ 、 $P/100$ の2通りについて、考えそれに対応する座屈荷重は、それぞれ、239.42kg、239.42kgである。これらの関係を、図-3および、図-4に示す。

アーチ：両端固定の場合、飛り現象も示す、 P - δ 関係が得られ、屈服点は、 $P=706.35\text{kg}$ 、 $w=4.106\text{cm}$ で、 $P=543.85\text{kg}$ まで、荷重減少に拘らず変形が進み、以後、再び耐荷力が増す。また、両端ヒンジアーチでは、 $P=713.68\text{kg}$ 、 $w=4.390\text{cm}$ の点で屈服し、 $P=665.01\text{kg}$ まで、荷重が減少しても変形は進み、以後、再び、耐荷力は、増加する。

(参考文献)

*) Khatwa T.P. and Cheng Y.K., "Triangular Element for Multilayer Sandwich Plates", J. Eng. Mech. Div. ASCE NO. EM5 Oct. 1972 pp.1225-1238

**) Sharifi P. and Popov E.P., "Nonlinear Buckling Analysis of Sandwich Arches", J. Eng. Mech. Div. ASCE NO EM5 Oct. 1971 pp.1397-1412

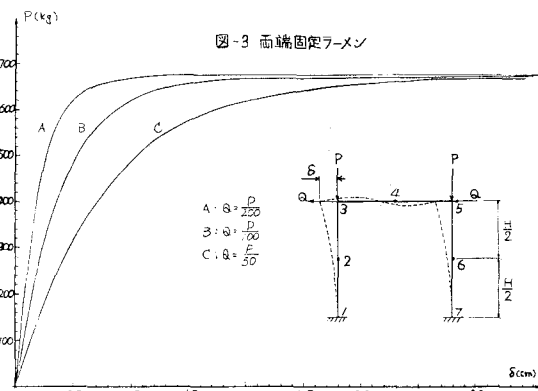


図-3 両端固定ラーメン

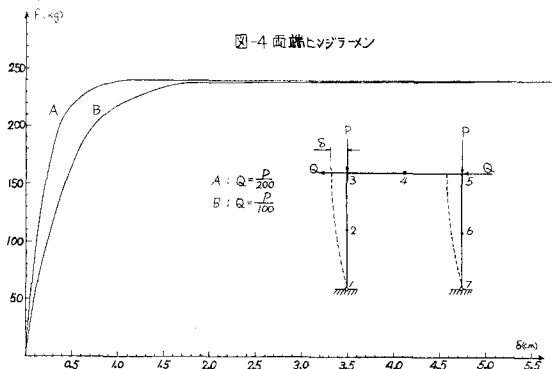


図-4 両端ヒンジラーメン

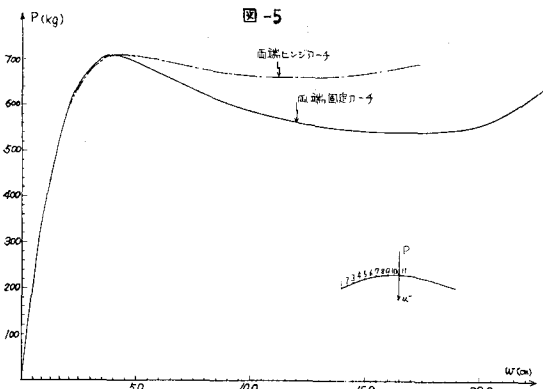


図-5