

岩手大学 正員 宮本 裕
北海道大学 正員 渡辺 昇
久慈高等学校 正員 安彦敏郎

1. まえがき

アレートガーダーの座屈において補剛材の役割が重要であるから、水平と垂直の補剛材を格子桁とみなし、格子桁の座屈解析をして、アレートガーダーの座屈耐荷力を求めるものである。

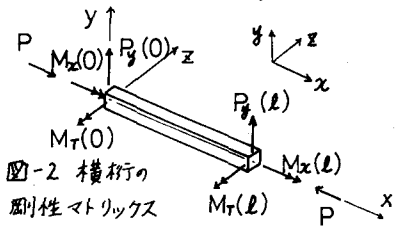
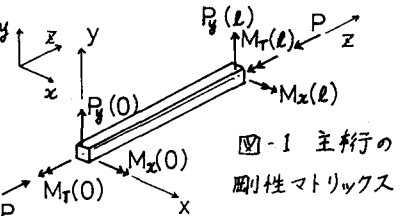
2. 解析の理論

格子桁の座屈の剛性マトリックスの誘導は文献(3)に述べられているが、ここで簡単に説明すると次のようになる。図-1 のような桁のひずみエネルギーを $U = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_x v_0''^2 + GJ \theta'^2) dz + \int_0^l P \left\{ \frac{1}{2} v_0'^2 + \frac{1}{2} r_s^2 \theta'^2 \right\} dz$... (1) で表わす。ただし $r_s^2 = \frac{1}{A} \int (x^2 + y^2) dA = \frac{1}{A} (I_x + I_y)$ とし、2軸対称断面とする。これに対し変位関数を $v_0(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$, $\theta(z) = b_0 + b_1 z$ と仮定し、たわみ角 $\beta(z) = v_0'(z)$ とすると、境界条件 $z=0$ のとき $v_0(0)$, $\beta(0)$, $\theta(0)$, $z=l$ のとき $v_0(l)$, $\beta(l)$, $\theta(l)$ を与えて、未定係数が求められる。すなわち、 $a_0 = v_0(0)$, $a_1 = \beta(0)$, $a_2 = -\frac{3}{2l} v_0(0) - \frac{2}{l} \beta(0) + \frac{3}{2l} v_0(l) - \frac{1}{l} \beta(l)$, $a_3 = \frac{3}{2l^3} v_0(0) + \frac{1}{l^2} \beta(0) - \frac{3}{2l^3} v_0(l) + \frac{1}{l^2} \beta(l)$, $b_0 = \theta(0)$, $b_1 = \frac{1}{l} \{-\theta(0) + \theta(l)\}$ となる。これらの未定係数を変位関数 $v_0(z)$, $\beta(z)$, $\theta(z)$ に代入し、さらにそれらの式を式(1)に代入すると、結局ひずみエネルギー U は変位 $v_0(0)$, $\beta(0)$, $\theta(0)$, $v_0(l)$, $\beta(l)$, $\theta(l)$ の関数となる。 U を変位 $v_0(0)$, $\beta(0)$, $\theta(0)$, $v_0(l)$, $\beta(l)$, $\theta(l)$ でそれぞれ微分すると力 $P_y(0)$, $M_x(0)$, $M_T(0)$, $P_y(l)$, $M_x(l)$, $M_T(l)$ が求められる。したがって主桁の剛性マトリックスは P

$$\begin{Bmatrix} P_y(0) \\ M_x(0) \\ M_T(0) \\ P_y(l) \\ M_x(l) \\ M_T(l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_x}{l^3} & \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_x}{l^3} & \frac{6EI_x}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{l^2} & \frac{4EI_x}{l} & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{2EI_x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} \\ -\frac{12EI_x}{l^3} & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{12EI_x}{l^3} & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{l^2} & \frac{2EI_x}{l} & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{4EI_x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \beta(0) \\ \theta(0) \\ v_0(l) \\ \beta(l) \\ \theta(l) \end{Bmatrix} - P \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15}l & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}l & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_s^2}{l} & 0 & 0 & -\frac{r_s^2}{l} \\ -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30}l & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}l & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_s^2}{l} & 0 & 0 & \frac{r_s^2}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \beta(0) \\ \theta(0) \\ v_0(l) \\ \beta(l) \\ \theta(l) \end{Bmatrix} \quad \dots (2)$$

式(2)のようになる。横桁についても同様の剛性マトリックスが得られるが、横桁の曲げモーメント、ねじりモーメントはそれぞれ主桁のねじりモーメント、曲げモーメントに相当し、同様に横桁のたわみ角、ねじり角はそれぞれ主桁のねじり角、たわみ角に相当するので、計算の都合上、横桁の力と変位を主桁の力と変位に一致させる。したがって式(2)において、 M_x を M_T に、 M_T を M_x に、

$$\begin{Bmatrix} P_y(0) \\ M_x(0) \\ M_T(0) \\ P_y(l) \\ M_x(l) \\ M_T(l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_x}{l^3} & 0 & \frac{6EI_x}{l^2} & -\frac{12EI_x}{l^3} & \frac{6EI_x}{l^2} \\ 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} \\ \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{4EI_x}{l} & -\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{2EI_x}{l} \\ -\frac{12EI_x}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{12EI_x}{l^3} & -\frac{6EI_x}{l^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} \\ \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{2EI_x}{l} & -\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{4EI_x}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \beta(0) \\ \theta(0) \\ v_0(l) \\ \beta(l) \\ \theta(l) \end{Bmatrix} - P \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{r_s^2}{l} & 0 & 0 & -\frac{r_s^2}{l} & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{15}l & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{30}l \\ -\frac{6}{5l} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{r_s^2}{l} & 0 & 0 & \frac{r_s^2}{l} & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{30}l & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{15}l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \beta(0) \\ \theta(0) \\ v_0(l) \\ \beta(l) \\ \theta(l) \end{Bmatrix} \quad \dots (3)$$



β を0に, 0を β にする。つまり主桁の剛性マトリックスの行と列を入れかえ, 横桁の剛性マトリックスを得る。式(2), (3)は一般的に $\{x\}=[k]\{\phi\}-P[g]\{\phi\}$ と書き表わされる。ここで $\{x\}, \{\phi\}$ はそれぞれ力, 変位ベクトルであり, $[k]$ は一般の桁についての剛性マトリックスであり, $[g]$ は幾何剛性マトリックスとよばれている。これらの剛性マトリックスを合計して全体の剛性マトリックスを作り, 境界条件を与えた後, 固有値問題として解く。すなわち $[K]\{\phi\}=P[G]\{\phi\}$... (4)

から P を求める一般固有値問題となる。これを解くにはコレスキー法を用いて $[M]\{\psi\}=P\{\psi\}$... (5)という標準固有値問題になおして P を求める。式(4)から式(5)を求めるには, コレスキー分解によって $[G]=[L][L^T]$ とする。ここで $[G]$ は正値対称行列でなければならぬ。 $[L]$ は下三角マトリックスである。また $\{\phi\}=[L^T]^{-1}\{\psi\}$ とおくと式(4)は $[K][L^T]^{-1}\{\psi\}=P[L][L^T][L^T]^{-1}\{\psi\}=P[L]\{\psi\}$ となるので, 両辺に左から $[L]^T$ をかけて, $[L]^T[K][L^T]^{-1}\{\psi\}=P[L]^T[L]\{\psi\}=P\{\psi\}$ となり, $[M]=[L]^T[K][L^T]$ とおくと式(5)のような標準固有値問題となる。

この場合, 幾何剛性マトリックス $[G]$ に零成分があれば次に示すように, $[G]$ が非零対角成分と零対角成分の部分にわかれるように, $[G]$ および $[K]$ の行と列の入れ換えを行なう。(これは横桁などに座屈荷重が働かない場合である。) すなわち

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad \dots (6)$$

このうち2式より $\{\phi_2\}=-[K_{22}]^{-1}[K_{21}]\{\phi_1\}$ を求め, 式1式に代入して

$$[K_a]\{\phi_1\}=P[G_{11}]\{\phi_1\}, \text{ ただし } [K_a]=[K_{11}]-[K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] \quad \dots (7)$$

を得る。この式(7)を改めて式(4)のように考えて一般固有値問題を解けばよい。

なお一般固有値問題のライブラリーは全国の各大型計算機センターにあるので利用するとよい。

3. 計算例

図-3のような格子桁では部材が主桁2本, 横桁2本であるから, 全体の剛性マトリックスを作り, 支点条件を与えると固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{24EI}{a^3} + \frac{24EI_0}{b^3} - \frac{12}{5a}P - \frac{12}{5b}P\eta\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{8EI}{a} + \frac{2}{b}GI_0 - \frac{4}{15}aP - \frac{2}{15}\frac{P\eta}{b}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{a}GI_0 + \frac{8}{b}EI_0 - \frac{2}{15}\frac{P}{a} - \frac{4}{15}\frac{P\eta}{b}\right) \end{vmatrix} = 0$$

となり

$$P_1 = \frac{10\left(\frac{EI}{a^3} + \frac{EI_0}{b^3}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{\eta}{b}\right)}, \quad P_2 = \frac{\left(\frac{8}{a}EI + \frac{2}{b}GI_0\right)}{\left(\frac{4}{15}a + \frac{2}{15}\frac{P\eta}{b}\right)}, \quad P_3 = \frac{\left(\frac{2}{a}GI_0 + \frac{8}{b}EI_0\right)}{\left(\frac{2}{15}\frac{P}{a} + \frac{4}{15}\frac{P\eta}{b}\right)} \quad \dots (8)$$

が求められる。

いま主桁と横桁に働く座屈荷重が同じ大きさの場合 $\eta=1$ とし, $a=0.5m$, $b=0.25m$, $EI=1 \times m^2$, $EI_0=0.5 \times m^2$, $GI_0=1 \times m^2$, $GI_0=0.5 \times m^2$, $I_0=0.1m$ を式(8)に代入すると, $P_1=66.68 \pm (66.67 \pm)$, $P_2=93.75 \pm (93.75 \pm)$, $P_3=187.5 \pm (187.5 \pm)$ となる。なお, ガッこの中の数値は式(4)による数値解法で求めたものである。同様に, 横桁に座屈荷重が働かない時は $\eta=0$ として, 上記の数値を式(8)に代入すると, $P_1=200.3 \pm (200.0 \pm)$, $P_2=150.0 \pm (150.0 \pm)$, $P_3=500.0 \pm (500.0 \pm)$ となる。ガッこの中の数値は式(7)による数値解法で求めたものである。

計算には北九, 東北大, 東大の大型計算機センターを利用した。

参考文献 1)成岡, 他4名: 骨組構造解析, 培風館, コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-1-B

2)山田, 佐藤: 有限要素法における最近の固有値問題解法, 生産研究 26巻6号

3)宮本: 剛性マトリックス法による格子桁の座屈解析, 東北支部講演概要(昭和52年2月)

