

岐阜大学大学院 学生員 ○ 松本 憲一
同 上 学生員 金 武文
岐阜大学工業短期大学部 正員 井上 肇

土木構造物にはコンクリートで作られたものが多いが、コンクリートの力学的性質は複雑であり、靜的には Creep, 動的には振動の減衰といった現象を呈し、粘弾性体として取扱った方がよい。しかし粘弾性体として振動問題を解く場合、弾性-粘弾性の対応原理のみで対処することはできず、Boltzmann の記憶函数(履歴積分)を考慮せねばならない。粘性減衰をもつ材料からなる構造物の振動については、複素バネの概念を導入してうまく説明できるが、材料の物性にもとづいた形での導入ではなく、もっと Macro 的なものであって、一たの振動性状も得ることはできる。(しかし、構造物の動的強度に因りて検討するとき、材料が非線型の挙動を示す領域に応力(あるいはひずみ)が入るような場合には、十分にはその威力を發揮できない。(したがって、Stress-Strain Curve に対応できるような形で、しかもひずみ速度の影響をも考慮(粘弾性(もちろん非線型))的な性質を導入するためには、粘弾性(線型、非線型)を考慮に入れた有限要素法か、差分法によって解析を進めなければならぬ。

ここでは、その手初めとして、線型領域内ではあるが、有限要素法による粘弾性体の振動解析法¹⁾によって、Maxwell-Voigt 型の 4 要素モデル(図-1)を、粘性としてもつ材料(コンクリートと想定)から構成されている円形固定アーチの面内における強制振動(Sine curve 振動)に対する応答解析を試みた。

円形アーチの有限要素は、 u, v とアーチの半径方向、円周方向の変位として、つぎのような変位函数を用いた(ここで $b = I/a^2$, $f = (1-b)/(1+b)$, a, I, F ; アーチの曲率半径, 断面二次モーメント, 断面積)。

$$v = C_1 + C_2\theta + C_3 \sin\theta + C_4 \cos\theta + C_5\theta \sin\theta + C_6\theta \cos\theta$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{b}{1+b} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = C_2 + C_3 \cos\theta - C_4 \sin\theta + C_5(f \sin\theta + \theta \cos\theta) + C_6(f \cos\theta - \theta \sin\theta)$$

曲げモーメント M , せん断力 N ²⁾ は

$$M = -\frac{EI}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad N = \frac{EF}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - u \right).$$

アーチ全体としての、運動方程式は、節点変位ベクトルと Y , 強制外力ベクトルと Z とすれば、

$$M \ddot{Y}^{(n)} + K Y^{(n)} - H^{(n)} = M \ddot{Z}^{(n)}$$

ここで、 M, K, H は、それぞれ時刻 $t = n \cdot \Delta t$ (Δt : 積分時間間隔) における質量(ここでは Consistent Mass と用いた)、剛性およびひずみの履歴積分に関する行列およびベクトルである。

$\ddot{Y}^{(n)}$ の時間に関する積分は、差分法によって $Y^{(n+1)} = 2Y^{(n)} - Y^{(n-1)} + \Delta t^2 \ddot{Y}^{(n)}$ として行なった。この差分スキームについて、種々の改良案、たとえば $2\ddot{y}^{(n)} + 11\ddot{y}^{(n-1)} + 2\ddot{y}^{(n-2)} = \frac{3}{4}(\ddot{y}^{(n+1)} + 16\ddot{y}^{(n)} - 24\ddot{y}^{(n-1)} + 16\ddot{y}^{(n-2)} + \ddot{y}^{(n-3)})$ といった Hermite 差分表現³⁾を考えたが、計算時間と考慮して、最も簡単なものを用いることとした。

計算例として、Maxwell-Voigt モデルとして、図-1 の 4 要素モデルを用い、アーチは半径 50 m, スパンライズ比 8, アーチの断面の高さ 1.918 m について、数値計算を行なった結果の 1 例を、図-2 に示す。ここで、時間積分の時間間隔は $\Delta t = 0.01$ 秒と用いた。このときの平面的なアーチの振動モードは図-3 の通りで、Watking の論文²⁾にみられる u について逆対称のもので、最低次の自由振動形である。(加振方向は水平) また、加振と打ち切った後の自由減衰振動の際の減衰定数は 1.65% であった。

この計算例では、僅か 6 分割でも、1 step 当り約 0.28 秒の計算時間を要し (FACOM 230-28 使用),

応答が安定するまでに、円振動数 $\omega = 2.87 \text{ rad/sec}$ 程度の波を算し、莫大に計算時間と必要とした。この分割数については、別に行なった弾性計算で求めた自由振動についての解から、利用できる程度の精度であることと確認しているため、多少の誤差はあっても Macro 的にアーチの振動と把握できるものとして実行した。

非線形粘弾性の場合には、有限要素法における Stiffness Matrix を表現することは、かなり大変であるため、一つの試みとして、質量についての Lumped Mass という考え方に対応した Lumped Spring-Dashpot という、モデルを用いて計算するのも考えられる。さらに、さきの時間積分の際の差分スキームと、この構造モデルについては、発表の際にゆずる。

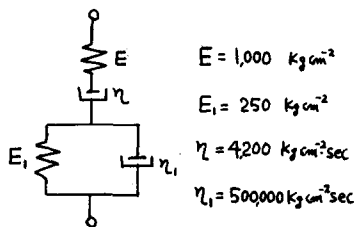


図-1 Maxwell-Voigt モデル

図-3 振動の拡大

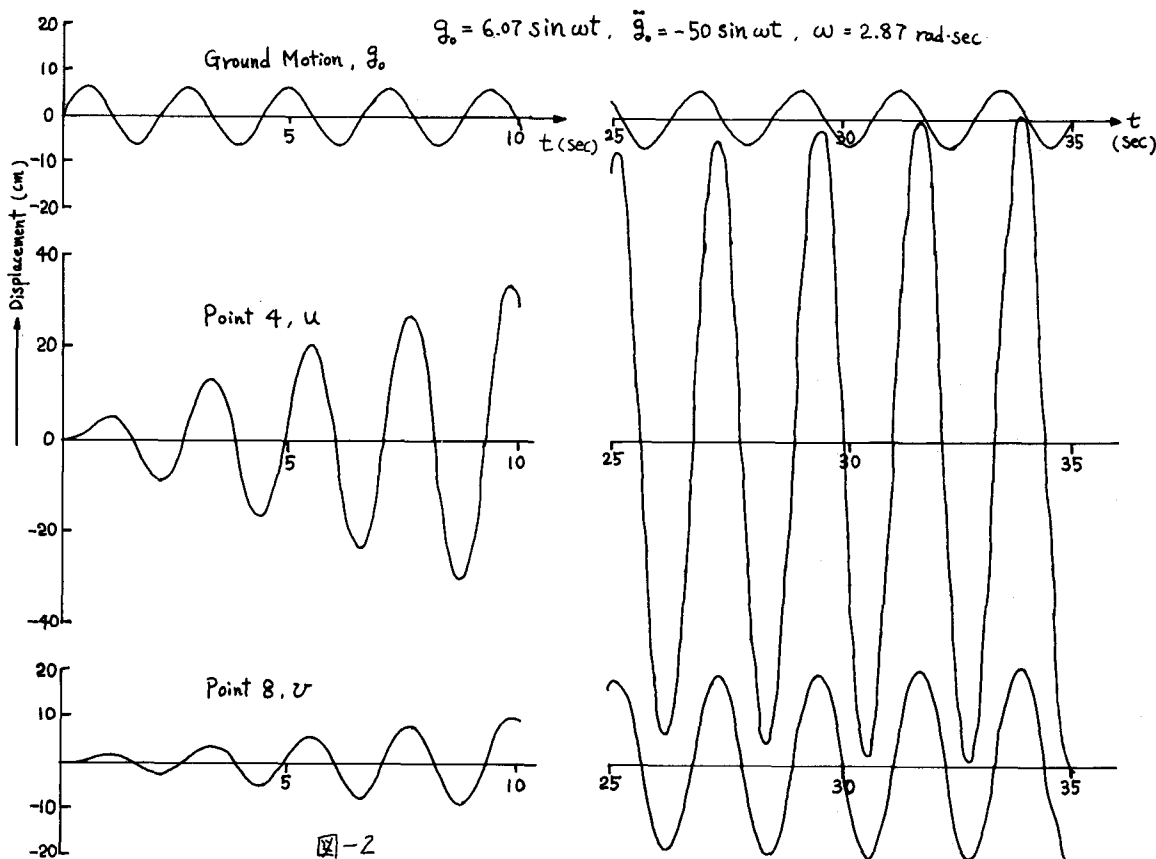
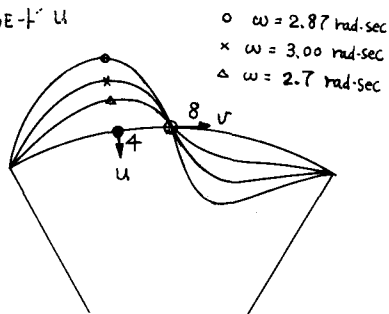


図-2

- 1) 渡辺; 有限要素法による粘弾性体の振動解析, 土木学会論文報告集, No. 198, 1972.2
- 2) Waltring; Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern, Ing.-Archiv, V, 1934
- 3) Collatz; The Numerical Treatment of Differential Equations, 3rd Ed, 1966, Springer