

東京都立大学工学部 正会員 望月利男

同 同 北川 博

同 同 小泉 敏一

1. はじめに 本報告で検討する等価線形化法は、大きな塑性流れには追従できないが、構造物の変形はある安定な領域にとどめるという設計目標に対しては十分に評価されうると考えられる。本論ではこうした観点から各種構造系に対しかなり適用性が高いと思われる、べき関数型復元力特性¹⁾を対象とし、地震応答解析に適用すべき等価粘性減衰定数を種々の手法より誘導するとともに、地震応答における等価粘性減衰定数について報告する。

2. べき関数型履歴系の等価粘性減衰定数 等価粘性減衰定数とは解析困難な履歴系を等価線形系に置き換える際に与えられた概念である。置換する際に、履歴系と等価線形系の共振時における面者の1サイクル間の損失エネルギーが等しく、かつ固有振動数(等価線形系が示す)が履歴系のそれと等しくなることが条件になる。しかしながら一般的に履歴系の固有振動数(共振振動数)は変位振幅等の関数となるため厳密に求めることが難しく、近似的な手法が幾つか考えられており、それに対応して等価粘性減衰定数 $h(X_0)$ も各種の表現をとることになる。以下べき関数型復元力モデルについて、Jenningsが²⁾Bilinear型復元力特性で示した方法と同様に、各種の $h(X_0)$ について検討する。定常振動に対する1質点系の無次元化振動方程式は、

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} + 2\bar{h}(\bar{x})\frac{d\bar{x}}{d\tau} + F(\bar{x}) = \frac{P_0}{F_s} \cos \eta \tau \quad (1)$$

ここに $\eta = \omega/\omega_s$, $\tau = \omega_s t$ であり、また $\bar{h} = \bar{c}/2\sqrt{m(F_s/X_s)}$ で微小振動時の粘性減衰定数である。また $F(\bar{x})$ を著者がいう、べき関数型復元力で表わせば、

$$F(\bar{x}) = \frac{F_s}{F_s} = \pm 2\bar{h}(\bar{x})\frac{(\bar{x}_0 \pm \bar{x})^\alpha}{2\bar{x}_0} + \bar{h}(\bar{x}_0)\frac{(\bar{x}_0)^\alpha}{2\bar{x}_0} \quad (2)$$

この履歴系の1サイクル間の損失エネルギーは、

$$\frac{E_d}{X_s F_s} = 4\bar{h} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \left(\frac{\bar{x}_0}{\bar{x}_s} \right)^{\alpha+1} \quad (3)$$

また固有振動数はSlowly varying parameter法より、

$$\frac{\omega_0}{\omega_s} = \left\{ \frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{\bar{x}_0}{\bar{x}_s} \right)^{\alpha-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

(1)~(4)式で X_s, F_s は無次元化定数を表わし、系の微小振動時における力-変位の関係(線形)を満足す

ると仮定すると、 ω_s はその時の固有円振動数を表わす。

(1)式の履歴系で $\bar{h}$ をゼロとおき、 m を後述の目的のため $m(X_0)$ として等価線形系に置換する。

$$m(X_0)\ddot{x} + c(X_0)\dot{x} + k(X_0)x = P_0 \cos \omega t \quad (5)$$

上式を X_s, F_s および η で無次元化すると

$$\frac{\ddot{x}}{X_s} + 2H(X_0)\frac{\dot{x}}{X_s} + K(X_0)\frac{x}{X_s} = \frac{P_0}{F_s} \frac{m}{m(X_0)} \cos \eta \tau \quad (6)$$

$$\text{ここで } H(X_0) = \frac{c(X_0)}{2\sqrt{m(X_0)F_s}}, K(X_0) = \frac{k(X_0)}{F_s} \frac{m}{m(X_0)} \quad (7)$$

m, c_s および c_{sc} はそれぞれ履歴系の質量、線形ばね(F_s/X_s)と微小振動時における臨界減衰係数である。

また(6)式の等価線形系の共振点における1サイクル間の損失エネルギーは

$$\frac{E_d}{H_s F_s} = 2\pi h(X_0)K(X_0)\left(\frac{X_0}{X_s}\right)^2 \frac{m(X_0)}{m} \quad (8)$$

ここで、 $h(X_0) = c(X_0)/c_{sc}(X_0)$ は等価線形系の粘性減衰定数、 $c_{sc}(X_0)$ は臨界減衰定数を示す。以上の諸式から各種の等価粘性減衰定数を算出する。表-1は等価線形系の質量、ばね、減衰定数を履歴系のパラメータで表現し、共振振幅、共振振動数の対応性をまとめたものである。³⁾また表-1の $h(X_0)$ と変位振幅の関係を図-1(a)・(b)に示した。ところで(2)・(5)・(6)の $h(X_0)$ は変位振幅に依存せず、 α のみによって定まるのでこの関係を図-1(c)に示した。

3. 地震応答における等価粘性減衰定数 上記各種手法のうち最も系の非線形応答特性をよく表わすと推測され、かつ概念が理解しやすいDynamic stiffnessの手法に準拠し、地震応答解析における等価粘性減衰定数を入力とし、構造物の周波数特性の面から若干検討

方法	共振振幅の一般	固有振動数の一般	質量 $m(X_0)$	ばね係数 $k(X_0)$	粘性減衰係数 $c(X_0)$	臨界減衰係数 $c_{sc}(X_0)$	等価粘性減衰定数 $h(X_0)$
1) Resonant Amplitude	○	○	m	F_s	$\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{X_0}{X_s} \right)^{\alpha-1}$	$2\sqrt{mF_s}$	$\frac{2\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{X_0}{X_s} \right)^{\alpha-1}$
2) Dynamic Stiffness	○	○	m	$\left(\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 F_s$	$\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{X_0}{X_s} \right)^{\alpha-1} \times \left(\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \sqrt{mF_s}$	$\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \sqrt{mF_s}$	$\frac{1-\alpha}{2\bar{h}} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}$
3) Dynamic Mass	○	○	$\left(\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 m$	F_s	$\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{X_0}{X_s} \right)^{\alpha-1} \times \left(\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \sqrt{mF_s}$	$\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \sqrt{mF_s}$	$\frac{2\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{X_0}{X_s} \right)^{\alpha-1}$
4) Dynamic Consistency	○	○	$\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} m$	$\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} F_s$	$\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{X_0}{X_s} \right)^{\alpha-1} \times \left(\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \sqrt{mF_s}$	$2\sqrt{mF_s}$	$\frac{1-\alpha}{2\bar{h}} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})} \times \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{X_0}{X_s} \right)^{\alpha-1}$
5) Geometrical Stiffness	○	○	m	$\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} F_s$	$\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{X_0}{X_s} \right)^{\alpha-1} \times \left(\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \sqrt{mF_s}$	$\frac{4\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)} \sqrt{mF_s}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$
6) Geometrical Energy Method							$\frac{1}{\sqrt{\pi}} (1-\alpha)$

表-1 種々の手法による等価粘性減衰定数

してゐる。等価粘性減衰定数 $h(x_0)$ 、ばね定数 $K(x_0)$ はそれぞれ履歴系と等価線形系の定常応答における振動特性を等しくおくことにより

$$h(x_0) = \frac{2\pi}{\pi} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} x_0^{\alpha-1} \eta \quad (9)$$

$$K(x_0) = \frac{4\pi}{\pi} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} x_0^{\alpha-1} \quad (10)$$

ここに $x_0 = \frac{x_0}{x_s}$ 。(9)式が示すように共振曲線全域を考えたれば $h(x_0)$ はもはや α のみに関数ではなく、 x_0 、 η にも依存するようになる。図-2(a)(b)(c)はそれぞれ η と x_0 の関係(共振曲線)、それに対応する $x_0-h(x_0)$ 、 $\eta-h(\eta)$ の関係の例である。共振点を除けば同一の x_0 に対して2つの η 値が存在することから、各変位レベルに対応する $h(x_0)$ は2つ存在することになる(共振点のみ1つ)。また η が大きくなると $h(x_0)$ が急速に減じ、共振点をすぎるとその変化は緩慢になる。したがって、共振時の関係より定まる減衰定数を用いることは、定常振動においては η が共振振動数より低い側で減衰量を過小評価し、逆に高い側においては必ずかではあるが過大評価するようになる。図-3(a)(b)は木造家屋、鉄骨造建物の定常応答から得られる η と $h(\eta)$ の関係である(パラメータは入力振幅 P_0)。

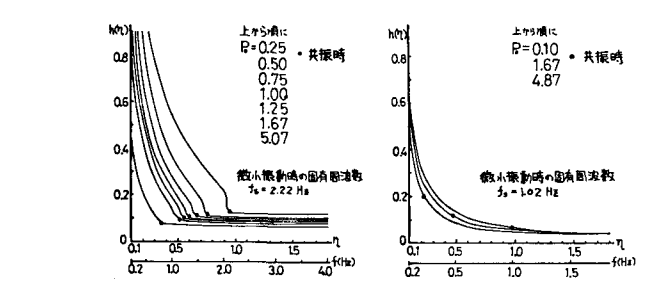
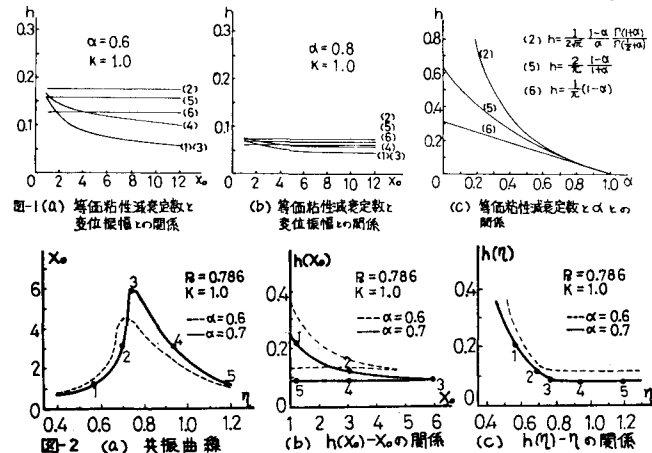


図-3 (a) 木造家屋 (b) 鉄骨造建物

共振時の $h(\eta)$ は加振レベルの上昇とともに (α) では減小、 (b) ではむしろ上昇している(η 全般では必ずしも減少)。表-2は実際の構造系の地震応答解析における h のおおよその目安をうために作成した。表の $h(x_0)$ の地震をみれば地震の特性により $h(x_0)$ の変化は様々であるが、 $h(x_0)$ 定常は全般に過大評価であり(但し、木造 White noise 入力時は過小評価)、特に鉄骨造(長周期構造物)で著しい。

4. おわりに 全体的にみて、地震動に対する履歴減衰の効果は、予期した以上に小さく特に長周期構造物、かつ加速度レベルが大きくなっても、その値は上昇しないが、減衰する場合も办なくないことがわかる。以上等価粘性減衰定数の性質を論じてきたが、その挙動はあまりにも複雑であり、現在のところ力学的に受け入れ易いと思われる手法でも、これを定数とみなした場合には良好な結果を得ていない。

参考文献

- 北川：履歴系の復元力モデルへの置換について(その2)べき関数型復元力モデルの特性とその適用性の検討 日本建築学会論文報告書 247号 1976.9月号
- P.C.Jennings: Equivalent Viscous Damping for Yielding Structure, ASCE, vol 94, EM1, 1968
- 望月・北川・小泉：等価線形化法に関する2,3の考察(その1)べき関数型履歴系の等価粘性減衰定数について 085052年度日本建築学会関東支部研究報告書
- 望月・北川：履歴系の復元力モデルへの置換について(その4)べき関数型履歴系の地震応答解析(伊) 日本建築学会論文報告書 257号 1977

	加速度 (gal)	木造 $h(x_0)$		鉄骨 $h(x_0)$	
		地震	定常	地震	定常
Taft EW 1952	200	0.0200	0.1153	0.0360	0.0595
	400	0.0900	0.1086	0.0320	0.0614
	600	0.1100	0.1025	0.0600	0.0682
El centro NS 1940	200	0.0900	0.1143	0.0600	0.0599
	400	0.0400	0.1027	0.0580	0.0658
	600	0.0600	0.0988	0.0540	0.0780
Tokyo 101	200	0.0000	0.1158	0.0460	0.0592
	400	0.0400	0.1059	0.0500	0.0628
	600	0.0400	0.0999	0.0496	0.0669
White Noise	200	0.1600	0.1270	0.0357	0.0593
	400	0.1200	0.1160	0.0400	0.0613
	600	0.1100	0.1087	0.0520	0.0651

表-2 $h(x_0)$ 地震:地震応答で履歴系の最大変位と等価系のそれを合わせたときの $h(x_0)$
 $h(x_0)$ 定常:履歴系の最大地震変位応答と等価系の定常共振振幅を合わせたときの $h(x_0)$