

1. まえがき ランダム振動理論の耐震工学への応用は最近著しい。このアプローチの主なメリットの一つとして、構造物の地震時動的挙動の全般的把握が容易にパラメトリック解析からできる点がある。今回の研究では構造物の非線形履歴復元力特性の応答へ及ぼす効果を扱った。入力強度が大きくなると、構造物は弾性限を超えた非線形応答を示し、この現象は減衰効果と剛性の低下という応答に関して相反的の性格のもので、それらに適正なる評価は重要である。

2. 解析 筆者らは既に Masings type の一般的履歴系 $M\ddot{x} + c\dot{x} + Q(x) = M\ddot{y}(t) \dots (1)$ の white noise 入力に対するランダム応答解析を行なってきた。それによるとまず履歴ループが折れ線 (segmentwise linear) で表わされる場合、力学モデルは図1となり (各バネの降伏レベルをバネ番号の順にとり)、単位時間当りのエネルギー消失期待量は

$$E[Q(x)\dot{x}] = \sum_{j=1}^n k_j \sum_{j=0}^n P(E_j) E[W_j V_j | E_j] = \sum_{j=1}^n k_j Y_j \sum_{j=1}^n P(E_j) E[|z| | E_j] \dots (2)$$

ここに E_j はある応答振巾 Q の状態でスライダ $i \sim j$ は滑っているが $(j+1) \sim n$ は滑っていない事象、 $P(\cdot)$ は確率を意味する。いま応答を次式で与える。

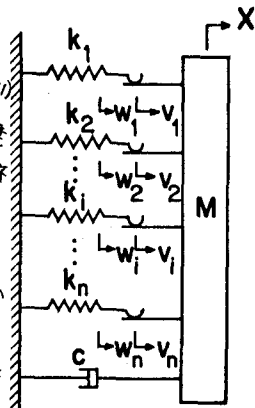


図1. 解析モデル

$x(t) = A(t) \cos \phi(t) = A(t) \cos \tilde{\phi}(t) \dots (3)$ 但し $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) \pmod{2\pi}$ で $[0, 2\pi]$ に一様分布し、 $A(t) (>0)$ の変化は $\cos \tilde{\phi}(t)$ に比べて滑らかと仮定する。よって

$$\dot{x}(t) \approx -A(t) \dot{\phi}(t) \sin \tilde{\phi}(t) \dots (4) \quad \text{振巾 } A(t) = a \text{ が } Y_m \leq a \leq Y_{m+1} \text{ とすると}$$

事象 E_j は $E_j = \{\phi_j^* \leq \tilde{\phi}(t) < \phi_{j+1}^*\} \cup \{\pi + \phi_j^* \leq \tilde{\phi}(t) < \pi + \phi_{j+1}^*\}$, $j = 1 \sim (m-1)$; $E_m = \{\phi_m^* \leq \tilde{\phi}(t) \leq \pi\} \cup \{\pi + \phi_m^* \leq \tilde{\phi}(t) \leq 2\pi\}$ (5)

但し $\phi_j^* = \cos^{-1}(1 - 2Y_j/a)$ 。この E_j の下では示は剛性 $K_j = \sum_{i=j+1}^n k_i$ 、減衰係数 C の線形系となる。よって

$$E[\dot{x}(t) | E_j, A(t) = a] = (K_j/M)^{1/2} \dots (6) \quad \text{となる。式 (4), (6) から式 (2) の条件付確率は}$$

$$E[|\dot{x}| | E_j, A(t) = a] = \begin{cases} (K_j/M)^{1/2} \cdot 2(Y_{j+1} - Y_j) / \pi P(E_j) & j = 1 \sim (m-1) \\ (K_m/M)^{1/2} \cdot 2(a - Y_m) / \pi P(E_m) & j = m \end{cases} \dots (7)$$

$A(t)$ の密度関数 $P_A(a)$ を導入すると $E[Q(x)\dot{x}] = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} [(K_j/M)^{1/2} - (K_{j+1}/M)^{1/2}] (HED)_{j,j+1} + (K_m/M)^{1/2} (HED)_a \right) P_A(a) da \dots (8)$ 但し $(HED)_{i,j} = 4k_i Y_i (A - Y_i)$, $(HED)_a = \sum_{i=1}^m (HED)_{i,j}$ 。一方、ポテンシャル・エネルギーの期待値は

$$E[Q(x)x] = ME[x^2] = M\omega_x^2 E[x^2] \dots (9) \quad \text{ここに } \omega_x^2 \text{ は応答平均振動数の自乗で式 (4) より } \omega_x^2 = E[\dot{\phi}^2] \dots (10)$$

と考えると $E[\dot{\phi}^2 | A(t) = a] = \sum_{j=1}^m P(E_j) E[\dot{\phi}^2 | E_j, A(t) = a] = \sum_{j=1}^m (K_j - K_{j+1}) / M + (K_m/M)$ ゆえに

$$E[Q(x)x] = \left\{ \sum_{j=1}^m (K_j - K_{j+1}) \phi_j^* + Ka \right\} P_A(a) da \cdot E[x^2] \dots (11)$$

図1のモデルにおいて、スプリング・スライダ要素数を無限に多くすれば極限として滑らかな履歴ループとすることができる。そのとき式 (8), (11) 中の

表1. Trilinear 系の R 値

ΣE項, ΣE項が小さくなるものとする

$$E[Q(x)\dot{x}] \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^a (K_j/M)^{1/2} (HED)_a P_A(a) da \dots (12)$$

$$E[Q(x)x] \approx \int_0^a K_a P_A(a) da \cdot E[x^2] \dots (13)$$

$P_A(a)$ には Rayleigh 分布を仮定すればよい。なお Bilinear type の場合は上式に厳密に成立する。

表1に Trilinear type について $R = E[Q(x)\dot{x}] / (E[Q(x)x])$ (12式) を典型的なケースを

σ_x / Y_1	$\lambda = \frac{1}{2} \quad \alpha = \frac{1}{10}$			$\lambda = \frac{1}{2} \quad \alpha = \frac{1}{5}$			$\lambda = \frac{1}{10} \quad \alpha = \frac{1}{10}$		
	Y_1 / Y_1			Y_1 / Y_1			Y_1 / Y_1		
	2	5	10	2	5	10	2	5	10
0.5	0.993	1.000	1.000	0.992	1.000	1.000	0.996	1.000	1.000
0.8	0.886	1.000	1.000	0.803	1.000	1.000	0.911	1.000	1.000
1.5	0.774	0.991	1.000	0.693	0.989	1.000	0.834	0.993	1.000
2.0	0.800	0.939	1.000	0.709	0.923	1.000	0.862	0.965	1.000
3.0	0.857	0.829	0.993	0.781	0.773	0.991	0.894	0.887	0.996
5.0	0.915	0.827	0.896	0.864	0.749	0.857	0.934	0.851	0.929
10.0	0.959	0.907	0.872	0.933	0.856	0.810	0.967	0.896	0.858
15.0	0.973	0.940	0.914	0.956	0.903	0.868	0.978	0.928	0.880

示す、 $\sigma_x = (E[x^2])^{1/2} \approx y_2$ の近傍のみで 1 を多少下廻っているがその他の領域で 1 となっている。図 2, 3 は同じく Tri-linear type の rms 変位応答値及応答平均振動数の変化を入力履歴と変化させて調べたもので、同図で用いている N は $N = (2S_0 \omega_0)^{1/2} / \omega_0^2$ 、 S_0 は white noise レベル、 ω_0 は微小弾性時の系の固有振動数、 β_0 はそのときの粘性減衰定数である。図中、本解析手法の精度の検証のためシミュレーション値を入れてある。これらは正規乱数を $\Delta t \omega_0 = 0.12$ 刻みで発生させ、それに対する系系の応答を継続時間 $n \Delta t \omega_0 = 1800$ にわたって統計処理した結果である。

ところで、実際の地震動は通常卓越周期を有する広帯域ランダム波であるから、以下これに対する検討を行なう。模擬地震動として filtered shot noise の考え方を採用する。即ち shot noise $I(t) \eta(t)$ を受ける 1 自由度系フィルタ

$$\ddot{y} + 2S_0 \omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = -I(t) \eta(t) \dots (14)$$

の絶対加速度応答と構造物への入力とする。応答解析は式 (12), (13) から

$$\begin{Bmatrix} C_{eq} \\ K_{eq} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E[x\ddot{x}] & E[x\dot{x}] \\ E[\dot{x}\ddot{x}] & E[\dot{x}\dot{x}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} E[Q(x)\ddot{x}] \\ E[Q(x)\dot{x}] \end{Bmatrix} \dots (15)$$

を介して得られる等価線形系 $M\ddot{x} + C_{eq}\dot{x} + K_{eq}x = -M(\ddot{y} + I(t)\eta(t)) \dots (16)$

について stepwise に行なう。定常確率応答ならばイテレーション手法も可能である。上記非土例系系の解析は文獻(2)に依る。ベクトル $\{u\}^T = \{x \ y \ \dot{x} \ \dot{y}\}$ を用いて式 (14), (16) を $\{\dot{u}\} + [D]\{u\} = \{Q\}I(t)\eta(t) \dots (17)$

と表わす。但し $[D] = \begin{bmatrix} [M]^{-1}[C] & [M]^{-1}[K] \\ -[I] & [0] \end{bmatrix}$ 、 $\{Q\} = \begin{bmatrix} [M]^{-1}\{F\} \\ \{0\} \end{bmatrix}$

そして $[M] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $[C] = \begin{bmatrix} C_{eq} & 0 \\ 0 & 2S_0 \omega_0 \end{bmatrix}$ 、 $[K] = \begin{bmatrix} K_{eq} & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix}$ 、 $\{F\} = \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix}$

応答共分散マトリックス $[R_u] = E[\{u\}\{u\}^T]$ は従って

$$\frac{d}{dt}[R_u] + [D][R_u] + [R_u][D]^T = 2\pi S_0 \{I(t)\{Q\}Q^T\} \dots (18)$$

の解となる。式 (18) は $I(t)$ が階段状に変化するとき複素固有値解析を通して解析解が求まる。本手法の妥当性を検証するためシミュレーションも併せて現在行なっている。

図 4 は Ramberg-Osgood type の white noise 入力に対する応答であるが

式 (12), (13) を地震動時の瞬間に用いる妥当性を調べるものとして掲げた。Hudson⁽³⁾ は上記系の模擬地震動による応答解析を行ない履歴減衰係数となった結果、平均粘性率応答 2.8 と初期剛性に対して約 4% の等価粘性減衰定数を得ている。図 4 からこの応答近傍とは同程度の値を読み取ることができる。

参考文献

- (1) Takemiya & Lutes, "Stationary Random Vibration of Hysteretic Systems," J. Eng. Mech. Div., ASCE (to appear)
- (2) 竹宮, 非線形履歴型復元力特性を有する多自由度系構造物のランダム地震応答解析, 土木学会論文集, 第 245 号, 1976. 1. pp. 17-26
- (3) Hudson, "Equivalent Viscous Friction for Hysteretic Systems with Earthquake-like Excitation," Proc. of 3rd WCEE, 1965, Vol. 2, pp. 185-201

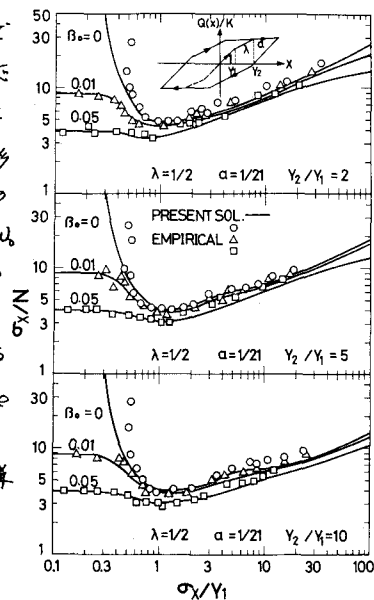


図 2. 定常 rms 変位

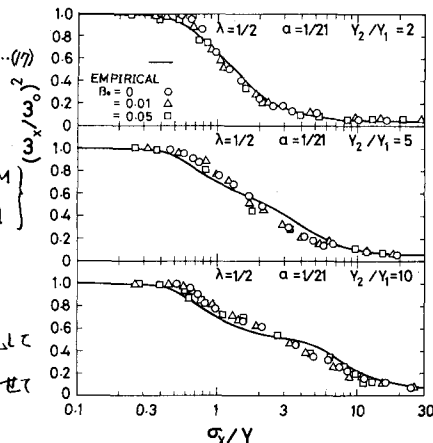


図 3. 応答平均振動数

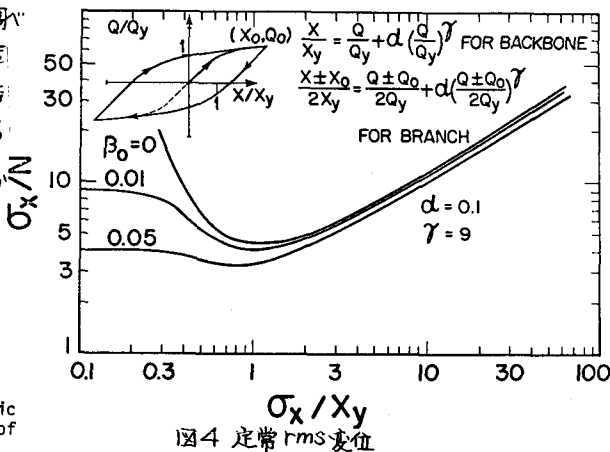


図 4. 定常 rms 変位