I-256 自己回帰モデルによる構造特性の推定

東京大学　学生員　的場純一
東京大学　正員　宮田利雄

I. 序論

構造物の減衰定数とか固有振動数の不規則な応答出力に基く推定には、従来から *Blackman-Tukey* 法（B-T法）や高速フーリエ変換法（FFT法）によるパワースペクトル密度関数（以後PDFと略す）や周波数応答関数のピーク値を利用する方法が用いられている。このとき、ピーク値付近での分解能の精度の良し悪しが推定値の精度に直接影響してくるわけであるが、これらの二つの方法はスムージングの問題などによりピーク値の分解能が必ずしも良くないことが知られている。

最近提案されたFPE（Finite Prediction Error）規準による自己回帰過程モデル（以後ARモデルと略す）のあてはめによれば、分解能の良いPDFの推定が与えられ、かつ、FPE規準を用いることによりPDFが自動的に推定できるという利点があることがわかってきた。(2),(3)

本報告では、以上の様な特性を利用した、ARモデル法を用いた減衰定数などの推定についての計算機シミュレーションによる数値計算結果を示し、従来用いられてきた方法による推定結果との比較を示す。(1)

II. 自己回帰モデルによる推定

定常でエルゴード性を有する確率過程の時系列表示としてのAR過程は次式で示される。

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} a_i x_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

ここで、ε_tはホワイトノイズ（白色雑音）であり、$E[\varepsilon_t]=0$，$E[\varepsilon_t \varepsilon_v] = \sigma_\varepsilon^2 \delta_{tv}$ である。

すなわち、対象とする確率過程時系列における時刻tでの値は、それ以前のp個の値とランダムショックε_tとの線型和として表示されるとするものである。言い換えれば、各時刻tでの値x_tとそれを過去のp個の値の線型和で近似する時の誤差が時間軸上無相関であるということで、一般の確率過程はこのAR過程により十分に近似でき、過程のメカニズムが複雑でない場合、次数pは小さな値となり、複雑になるにつれてpも大きくなる。

(1)式の次数およびパラメータの推定に対してFPE規準が提案されている。これは、最小二乗法を用いて観測データから得られるパラメータ推定を行った場合の一段予測誤差の二乗平均値を最小にする次数を採用する方法で、N個のデータが得られている場合、次数をn次とした時のFPEが漸近的に

$$FPE(n) = \frac{N+n+1}{N-n-1}\,\hat{\sigma}^2(n) \qquad (2)$$

の様になる。ここで、$\hat{\sigma}^2(n)$は次数nについて最小二乗法を採用した時の誤差の二乗平均値である。この時、PDFの推定値は次式で与えられる。

$$P(\lambda) = \hat{\sigma}^2(n) \Big/ |A(e^{-i2\pi\lambda})|^2 \qquad (3)$$

ここで、　$A(B) = 1 - \sum_{j=1}^{n} a_j B^j$　，　$\lambda = \Delta t \cdot f$　[cycles/time-interval]

ただし、(1)式で表わされるx_tが弱定常過程であるためには、$A(B)=0$の根が全て単位円内にあることが必要である。

ところで、本報告の目的である減衰定数の推定は次式によって行うことにした。

$$\zeta = \frac{\Delta f}{2f_0}\sqrt{1 + \frac{\Delta f}{f_0} - \left(\frac{\Delta f}{2f_0}\right)^2} \qquad (4)$$

ここで、f_0はPDFのピーク点での振動数であり、$\Delta f = f_2 - f_1$でf_1，f_2は½ピーク点での値である。($f_2 > f_1$)

III. 結果及び結論

系は1自由度系とし、固有周期T_0=1.0[sec]，減衰定数ζ_0（$\delta_0/2\pi$；δ_0は対数減衰率）を0.002から0.04の間に6個選んだ。計算機でシミュレートされた所定の外力に対して *Newmark's β* 法により応答変位を計算し、これを用いてARモデル法によってPDFを求め、(4)式によりζの推定を行った。ただし、サンプリング間隔Δtは

$\frac{\Delta t}{T_0}=\frac{1}{20}$ に設定し、推定に際しては、$\frac{N\Delta t}{T_0}$ を変えることにより推定精度の変化を見た。

対象とする外力としては、確率密度分布として正規分布、一様分布を持つ白色雑音外力、及び白色雑音に簡単な Recursive Filter をかけることにより、PDFが周波数軸上でピーク状をなす様にした外力の3種類を考えた。

紙面の都合上、推定結果を全て載せることはできないので、その一部を図1, 図2に示す。図1は $\frac{N\Delta t}{T_0}=200$ のときの推定結果を示しており、図2は $\frac{N\Delta t}{T_0}$ により推定精度がどの様に変化していくかを表わしている。

本研究結果より次のような事が明らかになった。

(i) FFT法では、ウィンドウ操作により推定値が異なり、最適な等価バンド幅をみつけることがむずかしい。

(ii) B−T法では、減衰定数 ζ_0 がある程度大きい場合（今回で言えば $\zeta_0=0.03, 0.04$）、かなり良い推定値を得ることができるが、ζ_0 の値が小さい所では、PDFの分解能が劣る為、鋭いピーク形とならず、推定精度は急に劣化し、今回の結果を見る限りではあまり実用に適さない。

(iii) 上の二方法に比べて、AR法による推定は精度的にかなり優れており、又ウィンドウ操作をする必要がないので推定値を一意的に求められる。更に、ARモデルによる推定法に関しては、以下の様な事が言える。

(a). 固有振動数はデータ数が少なくても、推定精度が良い。

(b). 減衰定数に関しては、外力が正規分布形に近ければ、ζ_0 が大きい値（0.02, 0.03, 0.04）では、データ数が少なくても、推定値は真の値とかなり近い値を取るが、ζ_0 が小さい値では、ある程度データ数が大きくないと良い推定値は得られない。又 $\zeta_0=0.002$ あたりの非常に減衰が小さい所では、やはり分解能の関係で多少精度は劣る様である。しかしながら、外力として正規白色雑音ではなく、PDFがピーク状をなすものでも、推定にはさほど影響がない様である。

(c) 外力が一様分布している場合、正規分布外力に比べてデータ数が少ない所では精度が悪いが、ある値以上であれば正規分布外力の場合とさほど相異がない。

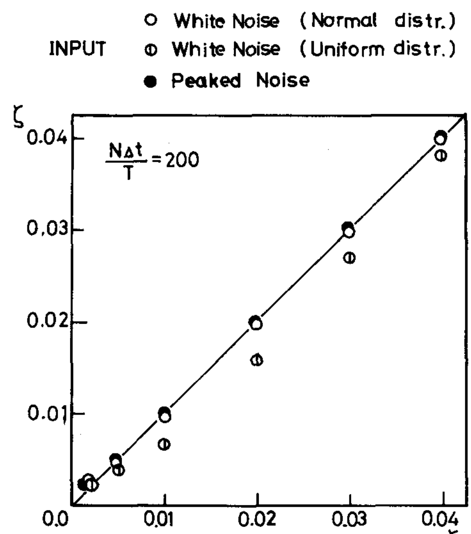

Figure 1

《参考文献》

(1). 的場, 宮田 "不規則な外力に基く減衰率および固有振動数の推定" 東大橋梁研報告 No. 77102 (1977)

(2) 赤池, 中川 "ダイナミックシステムの統計的解析と制御" サイエンス社 (1972)

(3). H. Akaike "Statistical Predictor Identification" Ann. Inst. Statist. Math. Vol 22 (1970)

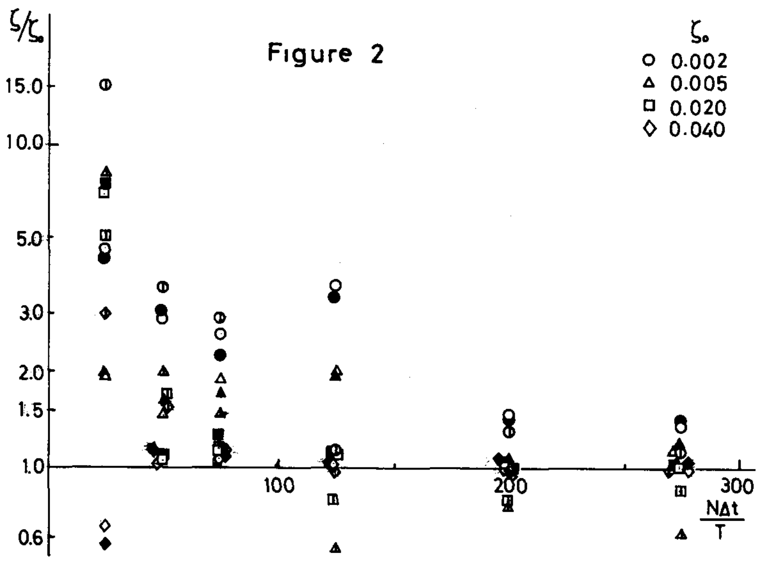

Figure 2