

I-238 自由長のある杭の固有振動数について

新潟大学 正員 大川秀雄
新潟大学 正員 矢島基臣
道路公団 正員 山崎勝志

1. まえがき 主たる荷重が波力などの横荷重である海洋構造物においては、その荷重が周期性をもつため構造物の固有振動数について注意を払う必要がある。それら海洋構造物のうち、ジャケットタイプのもは脚柱と支持杭が一体化している場合が多い。そのため、このタイプの構造物については、脚柱の支持条件のとり方によって、固有振動数の計算値が大きく左右されることが知られている。そこで、この種の構造物の最も単純なモデルとして、砂層中での自由長のある杭模型の自由振動実験について検討した。

2. 実験モデル 杭として図-1のようなアルミパイプを用いた。主な諸元は表-1に示した。砂中部分の長さを、25、50、75、100 cmの4段階とし、その各々に上載荷重を、0、1、2、4 kg（これに、加速度計等の重量107 gが加わる）の4ケースの自由振動実験より固有振動周期を測定した。杭の下端は良好な地盤に支持されていると考えて固定端として模型を設定した。

3. 固有振動周期の算定 図-1のように座標をとり、減衰を無視し、地盤の弾性係数を深さによらず一定とすれば、振動方程式は、

$$EI \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + m \ddot{y}_2 = 0 \quad \text{：地上部分}$$

$$EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + E_s y_1 + m \ddot{y}_1 = 0 \quad \text{：地中部分}$$

ここで、M：頭部集質量重、m：杭の単位長さ当りの質量、EI：杭の曲げ剛性、 E_s ：地盤の弾性係数、とする。境界条件は、

$$x = l_1 \text{ で } y_1 = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0$$

$$x = 0 \text{ で } y_1 = y_2, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3}$$

$$x = -l_2 \text{ で } \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0, \quad -EI \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} = M \ddot{y}_2$$

ここで、 $y = Y(x)e^{i\omega t}$ とおけば、地上部分の一般解は、

$$y_2 = C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x$$

$$\text{ただし、} \beta = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}}$$

地中部分については、

$$E_s > m\omega^2$$

$$y_1 = e^{\alpha x} (A_1 \cosh \alpha x + A_2 \sinh \alpha x) + e^{-\alpha x} (A_3 \cosh \alpha x + A_4 \sinh \alpha x)$$

$$\text{ただし } \alpha = \sqrt[4]{\frac{E_s - m\omega^2}{4EI}}$$

$$E_s < m\omega^2$$

$$y_1 = A_1 \cosh \alpha x + A_2 \sinh \alpha x + A_3 \cos \alpha x + A_4 \sin \alpha x$$

$$\text{ただし } \alpha = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2 - E_s}{EI}}$$

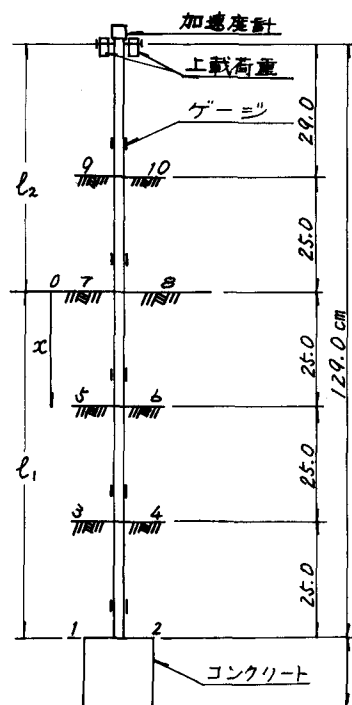


図-1 実験モデル

外 径	1.901 cm
肉 厚	0.097 cm
断面積	0.5502 cm ²
ヤング率	$6.728 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$
曲げ剛性	$1.509 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$
単位長さ当り質量	$0.1594 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}$
(コードも含む)	

表-1 モデル杭の諸元

以上をまとめて、振動数方程式を立てると、

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ & & & \\ & & & [B] \end{bmatrix} = 0$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_{11} &= \cosh \beta l_2 & A_{12} &= -\sinh \beta l_2 \\ A_{13} &= -\cos \beta l_2 & A_{14} &= \sin \beta l_2 \\ A_{21} &= \beta \gamma \cosh \beta l_2 + \sinh \beta l_2 & A_{22} &= -(\beta \gamma \sinh \beta l_2 + \cosh \beta l_2) \\ A_{23} &= \beta \gamma \cos \beta l_2 + \sin \beta l_2 & A_{24} &= -(\beta \gamma \sin \beta l_2 - \cos \beta l_2) \end{aligned}$$

ここで、 $\gamma = M/m$

$E_s > m\omega^2$ の場合だけ [B] を記せば

$$[B] = \begin{bmatrix} e^{\alpha l_1} \cos \alpha l_1 & e^{\alpha l_1} \sin \alpha l_1 & e^{-\alpha l_1} \cos \alpha l_1 & e^{-\alpha l_1} \sin \alpha l_1 \\ e^{\alpha l_1} (\cos \alpha l_1 - \sin \alpha l_1) & e^{\alpha l_1} (\cos \alpha l_1 + \sin \alpha l_1) & -e^{-\alpha l_1} (\cos \alpha l_1 + \sin \alpha l_1) & -e^{-\alpha l_1} (\cos \alpha l_1 - \sin \alpha l_1) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\theta}{4} - \frac{\theta^3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{\theta}{4} + \frac{\theta^3}{8} \\ \frac{\theta^2}{4} & \frac{\theta}{4} + \frac{\theta^3}{8} & -\frac{\theta^2}{4} & \frac{\theta}{4} - \frac{\theta^3}{8} \\ \frac{1}{2} & -\left(\frac{\theta}{4} - \frac{\theta^3}{8}\right) & \frac{1}{2} & -\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\theta^3}{8}\right) \\ -\frac{\theta^2}{4} & \frac{\theta}{4} + \frac{\theta^3}{8} & \frac{\theta^2}{4} & \frac{\theta}{4} - \frac{\theta^3}{8} \end{bmatrix}$$

ここで $\theta = \frac{\beta}{\alpha}$

4. 計算結果 テルツァギーによれば、砂質土では地盤の弾性係数 E_s は深さ x の一次関数で、 $E_s = \eta_h x$ であるので、平均的にみて、地中部分の長さの $1/2$ での深さにおける E_s で代表できるものとする。図-2 に示した実験に用いた砂は川砂で、粗粒率 2.29、均等係数 2.87、含水比 2.42% であり、これをバイブレータを使って十分に締め固めたもので、単位体積重量が 1.65 g/cm^3 、間隙比 0.672 であった。仮に、砂の相対密度が分類上 Medium に相当するとして、 η_h を 0.67 とおき、固有振動周期を計算し、図-2 に実験値と合わせて示した。図からわかるように、実験値と計算値は良く一致している。ここでは示さないが、砂を換え、これよりゆる詰めにした場合も、 E_s を適切に見積れば、少し精度は落ちるが同様に計算できることがわかった。なお、上載荷重による軸力の固有振動数に及ぼす影響は、ティモシェンコによれば

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{F l^2}{\pi^2 EI \pi^2}}$$

ただし、 F : 軸力
 n : モード次数

であるので、この実験について調べると、その影響は最大でも、3% に満たないので、軸力は無視した。また、この実験の下端固定杭の場合の E_s と同じ数値を使って、無限長杭として計算すると表-2 のようになり、地中部分が比較的短かくても、下端固定あるいはこれに近い条件ならば、無限長杭としての取扱いが可能であると言える。

砂層深さ (cm)	上載荷重 (kg)	周 期 (sec)			T_0/T_1	T_2/T_1
		実験値 T_0	計算値 T_1	無限長杭 としたとき T_2		
25	0	0.149	0.153	0.156	0.974	1.020
	1	0.420	0.418	0.423	1.005	1.012
	2	0.582	0.571	0.578	1.019	1.012
	4	0.871	0.793	0.803	1.098	1.013

表-2 固有振動周期の比較

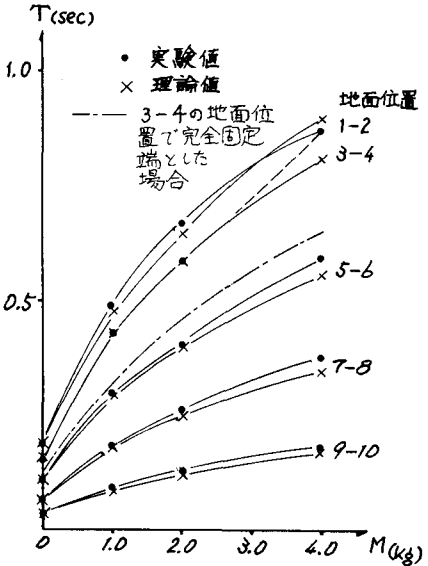


図-2 固有振動周期