

北海道大学 学生員 関野 昌人
 北海道大学 正 員 渡辺 昇
 北海道大学 正 員 金子 孝吉

1 まえがき

構造物の動的解析は、従来、水平動、上下動の単一成分を独立に扱う場合が多かった。著者らは、立体的に耐震設計を行う必要があると考え、水平動二成分と上下動との三成分の地震波を同時に立体的に入力した時の、振動性状について、解析的に進めることにした。先づ、本研究は、1質点3自由度系の構造物について考えた。

2 1質点3自由度系構造物の運動方程式とそのモード解

構造物のモデルとして、変位に比例する復元力が立体的に働く線型振動モデルを仮定した。減衰は、速度に比例する粘性減衰を考えた。任意の方向に直角座標 x, y, z をとれば(図1)、Laplaceの方程式より、

$$m\ddot{u}_i(t) + C\dot{u}_i(t) + \sum_j k_{ij}u_j(t) = -m\ddot{g}_i(t) \quad (i, j = x, y, z) \quad (1)$$

の3元連立常微分方程式となる。ここで

m : 質点の質量 [kg·sec²/cm]

C : 減衰係数 [kg·sec/cm]

k_{ij} : 質点を j 方向に単位長だけ変位させた時の i 方向のバネ定数 [kg/cm] $k_{ij} = k_{ji}$

$u_i(t), \dot{u}_i(t), \ddot{u}_i(t)$: i 方向の相対変位 [cm] 相対速度 [cm/sec] 相対加速度 [cm/sec²]

$\ddot{g}_i(t)$: i 方向の地震動の加速度 [cm/sec²]

式(1)をLaplace変換により、初期条件 $u_i(0) = \dot{u}_i(0) = 0$ ($i = x, y, z$)と仮定して解くと、

$$u_i(t) = \sum_j \sum_k \frac{i\delta_{jk}}{\sqrt{\alpha_k}} \int_0^t \ddot{g}_j(\tau) e^{-\lambda \tau} \sin \sqrt{\alpha_k}(t-\tau) d\tau \quad (2)$$

$$\dot{u}_i(t) + \ddot{g}_i(t) = \sum_j \sum_k \frac{i\delta_{jk}(\lambda^2 + \alpha_k)}{\sqrt{\alpha_k}} \int_0^t \ddot{g}_j(\tau) e^{-\lambda \tau} \sin \sqrt{\alpha_k}(t-\tau) + \phi_k d\tau \quad (3)$$

となる。ここで、 α_k ($k = 1, 2, 3$) は、特性方程式

$$H(s) = \begin{vmatrix} (\lambda^2 - k_{xx}) - (s + \lambda)^2 & -k_{xy} & -k_{xz} \\ -k_{yx} & (\lambda^2 - k_{yy}) - (s + \lambda)^2 & -k_{yz} \\ -k_{zx} & -k_{zy} & (\lambda^2 - k_{zz}) - (s + \lambda)^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

の $-(s + \lambda)^2$ についての根である。 $\sqrt{\alpha_k}$ は固有円振動数になる。また、

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ll} &= 1 & \delta_{lm} &= 0 \\ E_{ll} &= (\lambda^2 - k_{mm}) + (\lambda^2 - k_{nn}) & E_{lm} &= k_{lm} \\ \zeta_{ll} &= (\lambda^2 - k_{mm})(\lambda^2 - k_{nn}) - k_{mn}^2 & \zeta_{lm} &= k_{lm}(\lambda^2 - k_{nn}) - k_{ln}k_{mn} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & l, m, n \\ & = x, y, z \\ & \text{(cyclic)} \end{aligned}$$

とすると、 $i\delta_{jk}$ ($k = 1, 2, 3$) は、

$$i\delta_{j1} = \frac{\alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_1 E_{ij} + \zeta_{ij}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)} \quad i\delta_{j2} = \frac{\alpha_2 \delta_{ij} + \alpha_2 E_{ij} + \zeta_{ij}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)} \quad i\delta_{j3} = \frac{\alpha_3 \delta_{ij} + \alpha_3 E_{ij} + \zeta_{ij}}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

である。ただし、 $\lambda = \frac{C}{2m}$ $k_{ij} = k_{ji} = \frac{k_{ij}}{2m}$ $\phi_k = \tan^{-1}(-\frac{2\lambda\sqrt{\alpha_k}}{\lambda^2 - \alpha_k})$

i : ($= x, y, z$) 応答方向 j : ($= x, y, z$) 入力方向 k : ($= 1, 2, 3$) 振動次数

とする。

次に、構造物の振動特性として応答倍率を理論的に誘導するために、正弦波を入力波として式(1)を解くことにする。三方向から同時に正弦波 $\ddot{g}_j(t) = a_j \sin(\omega_j t + \theta_j)$ ($j = x, y, z$) を入力すると、

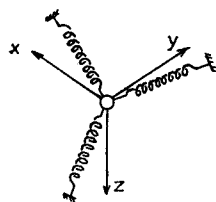


図 1

$$U_{ik}(t) = \sum_j \frac{1}{\omega_j^2} \sqrt{(\sum_k iY_{jk} A_{jk})^2 + (\sum_k iY_{jk} B_{jk})^2} \sin(\omega_j t + \phi_{ij}) + e^{-\lambda t} \sum_k \sqrt{(\sum_j iY_{jk} C_{jk} / \omega_j^2)^2 + (\sum_j iY_{jk} D_{jk} / \omega_j^2)^2} \sin(\sqrt{\alpha_k} t + \phi_{ik}) \quad (5)$$

$$\ddot{U}_{ik}(t) = - \sum_j \sqrt{(\sum_k iY_{jk} A_{jk})^2 + (\sum_k iY_{jk} B_{jk})^2} \sin(\omega_j t + \phi_{ij}) + e^{-\lambda t} \sum_k \sqrt{(\sum_j iY_{jk} E_{jk})^2 + (\sum_j iY_{jk} F_{jk})^2} \sin(\sqrt{\alpha_k} t + \phi_{ik}) \quad (6)$$

である。ここで

$$A_{jk} = a_j \{ -2\zeta_j \cos \theta_j + (\zeta_j^2 + \eta_{jk}^2 - 1) \sin \theta_j \} / G_{jk}$$

$$B_{jk} = a_j \{ (\zeta_j^2 + \eta_{jk}^2 - 1) \cos \theta_j + 2\zeta_j \sin \theta_j \} / G_{jk}$$

$$C_{jk} = a_j \{ 2\zeta_j \cos \theta_j - (\zeta_j^2 + \eta_{jk}^2 - 1) \sin \theta_j \} / G_{jk}$$

$$D_{jk} = a_j \{ (\zeta_j^2 - \eta_{jk}^2 + 1) \cos \theta_j - \zeta_j (\zeta_j^2 + \eta_{jk}^2 + 1) \sin \theta_j \} / (\eta_{jk} G_{jk})$$

$$E_{jk} = (\zeta_j^2 - \eta_{jk}^2) C_{jk} - 2\zeta_j \eta_{jk} D_{jk}$$

$$F_{jk} = 2\zeta_j \eta_{jk} C_{jk} + (\zeta_j^2 - \eta_{jk}^2) D_{jk}$$

$$G_{jk} = 4\zeta_j^2 + (\zeta_j^2 + \eta_{jk}^2 - 1)^2$$

$$\phi_{ij} = \tan^{-1} \left(\frac{\sum_k iY_{jk} A_{jk}}{\sum_k iY_{jk} B_{jk}} \right)$$

$$\phi_{ik} = \tan^{-1} \left(\frac{\sum_j iY_{jk} C_{jk} / \omega_j^2}{\sum_j iY_{jk} D_{jk} / \omega_j^2} \right)$$

$$\phi_{ik} = \tan^{-1} \left(\frac{\sum_j iY_{jk} E_{jk}}{\sum_j iY_{jk} F_{jk}} \right)$$

ただし、 $\zeta_j = \frac{\lambda}{\omega_j}$ $\eta_{jk} = \frac{\sqrt{\alpha_k}}{\omega_j}$

$i: (=x, y, z)$ 応答方向

$j: (=x, y, z)$ 入力方向

$k: (=1, 2, 3)$ 振動次数

とする。

3 数値計算例

表1に示す構造諸元を持つ1質点系構造物について計算した。地震動としては、入戸で実測された1968年十勝沖地震の加速度記録(図2(a)~(c))を用いた。その絶対加速度応答波を図2(d)~(f)に示す。入力加速度のフーリエスペクトルと応答加速度のそれとの比(増幅率)を図3に示す。尚、 x, y, z 方向を、それぞれNS, EW, UD方向とした。

図2から、NS, EW方向の増幅に比べ、UD方向の増幅が大きいことがわかる。図3からも同様のことが云え、更にNS, EW方向では1次と2次の固有周期が卓越し、UD方向では3次の固有周期が卓越していることがわかる。

三成分の地震波を同時に立体的に入力することによって、構造物の挙動を三次元的に考えることができる。

計算には、北海道大学大型計算機センターのFACOM 230-75を使用した。

質量	$m = 1 \times 10^3 \text{ kg sec}^2/\text{cm}$	固有周期
減衰係数	$C = 2 \times 10^3 \text{ kg sec}/\text{cm}$	$T_1 = 0.47 \text{ sec}$
バネ定数	$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 \times 10^5 & \text{sym.} \\ 2 \times 10^4 & 2 \times 10^5 \\ 6 \times 10^4 & 6 \times 10^4 & 6 \times 10^5 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$	$T_2 = 0.44 \text{ sec}$
		$T_3 = 0.25 \text{ sec}$

表1 構造諸元

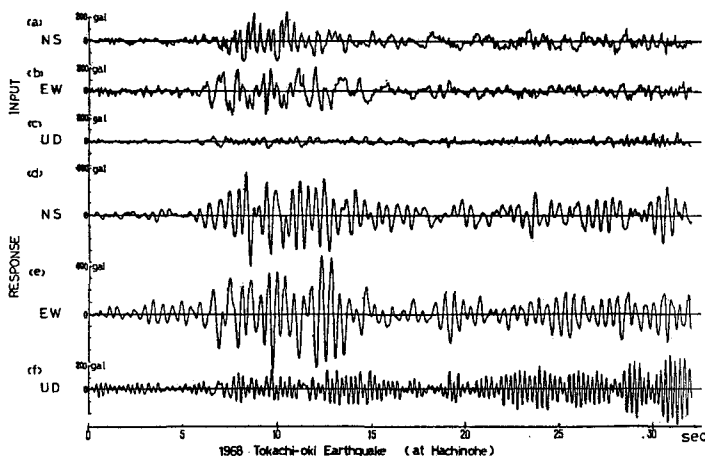


図2

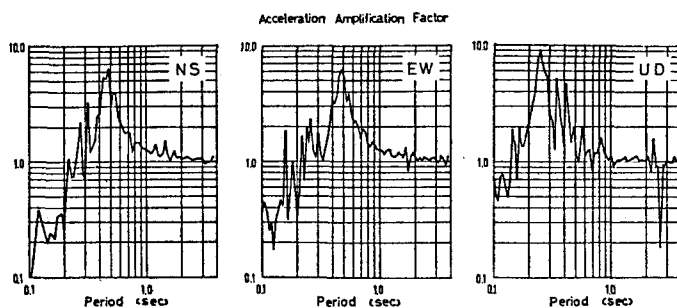


図3