I-192　トラス橋の振動解析に関する基本的考察

八戸工業大学　正員　長谷川 明
八戸工業大学　正員　亀山 和男
東北大学　学生員　西村 和男

トラス橋の振動解析について，すでに連続体の振動解析のためのラグランジェ方程式を使ってトラスの部材質量を質点系に置き換えることなく連続的に分布するものとして計算する手法を導入している[1]。その際には部材 ij の横方向 normal function v_{ij} は線形化を行っていた。そこで部材 ij の本来の横方向 normal function を用いトラス橋の振動解析を比較検討した。それぞれの手法は次のようになる。

1. 部材 ij の normal function

1) 線形化した時

縦方向　$u_{ij}=A_{ij}\cos\gamma x+B_{ij}\sin\gamma x$

横方向　$v_{ij}=C_{ij}+D_{ij}x$

2) 線形化しない時

縦方向　$u_{ij}=A_{ij}\cos\gamma x+B_{ij}\sin\gamma x$

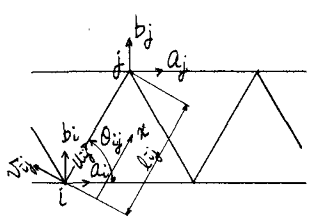
横方向　$v_{ij}=C_{ij}\cos k_{ij}x+D_{ij}\cosh k_{ij}x+E_{ij}\sin k_{ij}x+F_{ij}\sinh k_{ij}x$

ここで elementary theory では

$$k_{ij}=\gamma\sqrt{\frac{S_{ij}}{I_{ij}}}$$

S_{ij} ：ij 部材の断面積
I_{ij} ：ij 部材の断面2次モーメント

2. 節点変位の適合



1) 線形化した時

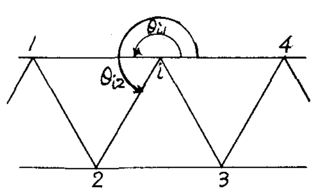
$$u_{ij(x=0)}=a_i\cos\theta_{ij}+b_i\sin\theta_{ij}$$
$$u_{ij(x=l_{ij})}=a_j\cos\theta_{ij}+b_j\sin\theta_{ij}$$
$$v_{ij(x=0)}=-a_i\sin\theta_{ij}+b_i\cos\theta_{ij}$$
$$v_{ij(x=l_{ij})}=-a_j\sin\theta_{ij}+b_j\cos\theta_{ij}$$

2) 線形化しない時

上記1)の4式の他に $x=0,\ l_{ij}$ において曲げモーメント M_{ij} が存在しないことにより，

$$M_{ij(x=0)}=0$$
$$M_{ij(x=l_{ij})}=0 \qquad ここで\ M_{ij}=EI_{ij}\frac{\partial^2 v_{ij}}{\partial x^2}$$

3. 平衡条件式



1) 線形化した時

水平　$\sum_{j=1}^{4}T_{ij}\cos\theta_{ij}=0$

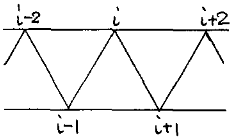
鉛直　$\sum_{j=1}^{4}T_{ij}\sin\theta_{ij}=0$

2) 線形化しない時

水平　$\sum_{j=1}^{4}T_{ij}\cos\theta_{ij}+\sum_{j=1}^{4}Q_{ij}\sin\theta_{ij}=0$

鉛直　$\sum_{j=1}^{4}T_{ij}\sin\theta_{ij}-\sum_{j=1}^{4}Q_{ij}\cos\theta_{ij}=0$　　ここで $T_{ij}=ES_{ij}\dfrac{\partial u_{ij}}{\partial x}$，$Q_{ij}=EI_{ij}\dfrac{\partial^3 v_{ij}}{\partial x^3}$

〈例〉正三角形パネルで構成されたトラスのi節点における平衡条件式は前ページ1,2,3により次のように表わされる。但し各部材は次表の要素をもつものとする。



	S_{ij}	I_{ij}	k_{ij}	l_{ij}
上下弦材	S_1	I_1	k_1	l
斜材	S_2	I_2	k_2	l

1)線形化した時

水平　$4\frac{S_1}{S_2}a_{i-2}+a_{i-1}+\sqrt{3}b_{i-1}-\left(2+8\frac{S_1}{S_2}\right)\cos\gamma l\, a_i+a_{i+1}-\sqrt{3}b_{i+1}+4\frac{S_1}{S_2}a_{i+2}=0$

鉛直　$-a_{i-1}-\sqrt{3}b_{i-1}+2\sqrt{3}\cos\gamma l\, b_i+a_{i+1}-\sqrt{3}b_{i+1}=0$

2)線形化しない時

水平
$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{S_1\gamma}{\sin\gamma l}\right\}a_{i-2}+\left\{\frac{S_2\gamma}{4\sin\gamma l}+\frac{3}{8}I_2k_2^3\left(\frac{1}{\sin k_2l}-\frac{1}{\sinh k_2l}\right)\right\}a_{i-1}\\
&+\left\{\frac{\sqrt{3}S_2\gamma}{4\sin\gamma l}-\frac{\sqrt{3}}{8}I_2k_2^3\left(\frac{1}{\sin k_2l}-\frac{1}{\sinh k_2l}\right)\right\}b_{i-1}\\
&+\left\{-\frac{\cos\gamma l}{\sin\gamma l}\left(S_1\gamma+\frac{S_2\gamma}{2}\right)+\frac{3}{4}I_2k_2^3\left(\frac{\cosh k_2l}{\sinh k_2l}-\frac{\cos k_2l}{\sin k_2l}\right)\right\}a_i\\
&+\left\{\frac{S_2\gamma}{4\sin\gamma l}+\frac{3}{8}I_2k_2^3\left(\frac{1}{\sin k_2l}-\frac{1}{\sinh k_2l}\right)\right\}a_{i+1}\\
&+\left\{-\frac{\sqrt{3}S_2\gamma}{4\sin\gamma l}+\frac{\sqrt{3}}{8}I_2k_2^3\left(\frac{1}{\sin k_2l}-\frac{1}{\sinh k_2l}\right)\right\}b_{i+1}+\left\{\frac{S_1\gamma}{\sin\gamma l}\right\}a_{i+2}=0
\end{aligned}$$

鉛直
$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{I_1k_1^3}{2}\left(\frac{1}{\sin k_1l}-\frac{1}{\sinh k_1l}\right)\right\}b_{i-2}+\left\{\frac{\sqrt{3}S_2\gamma}{4\sin\gamma l}-\frac{\sqrt{3}}{8}I_2k_2^3\left(\frac{1}{\sin k_2l}-\frac{1}{\sinh k_2l}\right)\right\}a_{i-1}\\
&+\left\{\frac{3S_2\gamma}{4\sin\gamma l}+\frac{1}{8}I_2k_2^3\left(\frac{1}{\sin k_2l}-\frac{1}{\sinh k_2l}\right)\right\}b_{i-1}\\
&+\left\{-\frac{3}{2}S_2\gamma\frac{\cos\gamma l}{\sin\gamma l}+I_1k_1^3\left(-\frac{\cos k_1l}{\sin k_1l}+\frac{\cosh k_1l}{\sinh k_1l}\right)+\frac{I_2k_2^3}{4}\left(-\frac{\cos k_2l}{\sin k_2l}+\frac{\cosh k_2l}{\sinh k_2l}\right)\right\}b_i\\
&+\left\{-\frac{\sqrt{3}S_2\gamma}{4\sin\gamma l}+\frac{\sqrt{3}}{8}I_2k_2^3\left(\frac{1}{\sin k_2l}-\frac{1}{\sinh k_2l}\right)\right\}a_{i+1}\\
&+\left\{\frac{3S_2\gamma}{4\sin\gamma l}+\frac{I_2k_2^3}{8}\left(\frac{1}{\sin k_2l}-\frac{1}{\sinh k_2l}\right)\right\}b_{i+1}+\left\{\frac{I_1k_1^3}{2}\left(\frac{1}{\sin k_1l}-\frac{1}{\sinh k_1l}\right)\right\}b_{i+2}=0
\end{aligned}$$

上記の平衡条件式は，トラスのパネル数をnとすれば，節点数は$(2n+1)$個あるので，$(2n+1)\times2-3=4n-1$個ある。又，この時a_i, b_iの未知数は$(2n+1)\times2-3=4n-1$個あり，平衡条件式は，次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1\,4n-1}\\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2\,4n-1}\\ \vdots & & & \vdots \\ X_{4n-1\,1} & X_{4n-1\,2} & \cdots & X_{4n-1\,4n-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1\\ b_1\\ \vdots\\ a_{2n+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\end{Bmatrix}$$

これを満足するために左辺のマトリックスの行列式が0とならなければならないのでこれによりγが求まる。

〈参考文献〉 1)、多谷虎男 村井貞規 長谷川明,「トラス橋に関する解法」昭和50年度東北支部講演概要集