

長崎大 正員<sup>○</sup> 築 地 恒 天  
長崎大 山 中 康 種

## 1 まえがき

初期ねじれのある薄肉断面はりの自由振動については、従来から薄肉長方形断面の曲げ振動に関して多くの研究がなされているが、ねじり振動については二・三を除いてほとんど行われていない。断面が二軸対称の場合初期ねじれはりのねじれ振動には縦振動が連成し、初期ねじれが大きい程連成の度合も大きい。ここでは、初期ねじれが極度に大きくない初期ねじれはりの、ねじれ-縦連成振動を支配する微分方程式を導き、振動特性に及ぼす初期ねじれの影響を調べる。

## 2 基礎式

座標軸を図1のように設ける。二軸対称断面を対象にすると、ねじれ変形と軸方向変形のみ連成し、曲げ変形は生じないので、自由振動に関するハミルトンの原理は次のように書ける。

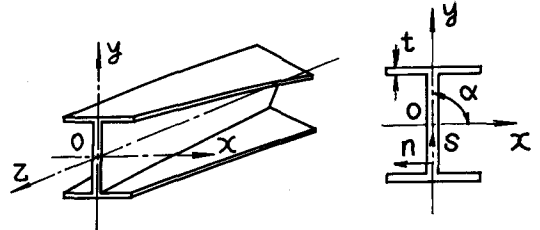


図1 初期ねじれはり

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi_s) dt = 0 \quad \dots (1)$$

ここに、 $t$ は時間、 $T$ は運動エネルギー、 $\Pi_s$ は位置エネルギーでそれぞれ次のように書ける。

$$T = \frac{m}{2} \int_0^l \left[ A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right] dz \quad \dots (2)$$

ここに、 $m$ ははりの単位長さごりの質量、 $A$ は断面積、 $I_p$ は断面の極2次モーメント、 $w$ は圆心の $z$ 方向変位、 $\theta$ は $z$ 軸まわりの断面回転角である。また、 $\Pi_s$ は

$$\Pi_s = \frac{E}{2} \int_0^l \left[ A \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + I_\omega \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)^2 + I_{rr} K^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + I_r K \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dz + \frac{G}{2} \int_0^l J \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dz \quad \dots (3)$$

ここに、 $E, G$ は材料定数、 $K$ は初期ねじれ率である。また(3)式の断面定数は次の定義に従う。

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA, \quad I_r = \int_A (x_o^2 + y_o^2) dA, \quad I_{rr} = \int_A (x_o^2 + y_o^2)^2 dA, \quad J = 4 \int_A n^2 dA \quad \dots (4)$$

ここに、 $\omega$ は圆心に関する断面の単位長さ関数、 $x_o, y_o$ は断面板厚中央面上の任意点の座標である。

(2), (3)式を(1)式に代入し、部分積分を行うと、初期ねじれはりのねじれ-縦連成振動に関する微分方程式および境界条件が求まる。

微分方程式：

$$\left. \begin{aligned} EI_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - (GJ + EI_{rr} K^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - EI_r K \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + m I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0 \\ -EA \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - EI_r K \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + m A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (5)$$

境界条件：  $z = 0$  または  $l$  で、

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 0 \quad \text{または} \quad -EI_\omega \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + (GJ + EI_{rr} K^2) \frac{\partial \theta}{\partial z} + EI_r K \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0 \quad \text{または} \quad EI_\omega \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (6)$$

$$w = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad EA \frac{\partial w}{\partial z} + EI_r K \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

### 3 解析例

$z = 0$  断面で固定され片持ちはりを対象とする。

(a) そり変形が無視できる場合 ( $I_w = 0$ )

境界条件 (b) を満たす変位関数は、

$$\theta = \sum_i a_i \sin \frac{i\pi}{2} \cdot \frac{z}{l} \cdot \cos \omega t, \quad \frac{w}{l} = \sum_i b_i \sin \frac{i\pi}{2} \cdot \frac{z}{l} \cdot \cos \omega t \quad (i=1, 3, 5, \dots)$$

ここに、 $\omega$  は角振動数、 $a_i, b_i$  は未知定数である。この2式を微分方程式に代入すると、振動の固有値  $\lambda = \sqrt{mI_p/GJ} \cdot \omega l$  が次のように求まる。

$$\lambda = \frac{i\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{2\mu} [\delta + \beta\mu \pm \sqrt{(\delta - \beta\mu)^2 + 4\mu\gamma^2}]} = \frac{i\pi}{2} \varphi \quad (i=1, 3, 5, \dots) \quad \dots (7)$$

ここに、 $\beta = 1 + \frac{EI_{rr}}{GJl^2} (Kl)^2$ ,  $\gamma = \frac{EI_r}{GJ} (Kl)$ ,  $\delta = \frac{EAl^2}{GJ}$ ,  $\mu = \frac{Al^2}{I_p}$  であり、 $\varphi$  は初期ねじり

れによる片持ちはりねじり振動固有値の修正係数である。(7) 式で⊕の固有値はねじり変形が卓越した振動であり、⊖の固有値は撓変形とねじり変形が同じオーダーの振動である。振幅の比は、

$$\frac{b_i}{a_i} = -\frac{\gamma}{\delta - \varphi^2 \mu} \quad \dots (8)$$

で、振動の次数に無関係である。長方形断面はり (断面  $30 \times 3$ , 長さ  $300$ ) について、 $\varphi$  と初期ねじり  $Kl = 2$  の関係を図2に、 $b_i/a_i$  と  $\varphi$  の関係を表1に示す。

(b) そり変形が無視できない場合 ( $I_w \neq 0$ )

$\theta = \sum_i a_i f_i(z) \cdot \cos \omega t \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $\frac{w}{l} = \sum_j b_j \sin \frac{j\pi}{2} \cdot \frac{z}{l} \cdot \cos \omega t \quad (j=1, 3, 5, 7)$  と仮定し、ガラーキン法を用いて固有値入を求める。図に示す薄肉H型断面 ( $b/h = 0.5$ ,  $t/h = 0.1$ ,  $h/l = 0.1$ ) に対する解析結果を図3に示す。 $f_i(z)$  は  $i$  次の自由曲げ振動固有関数である。

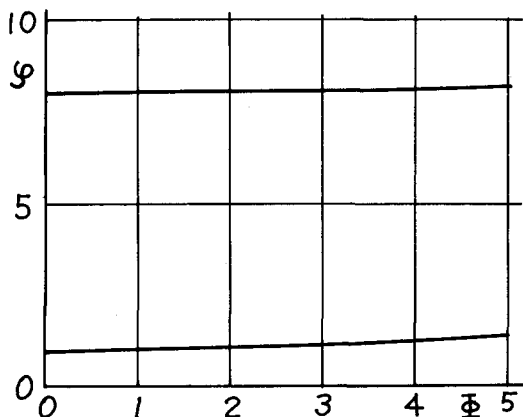


図2 固有値修正係数 (長方形断面)

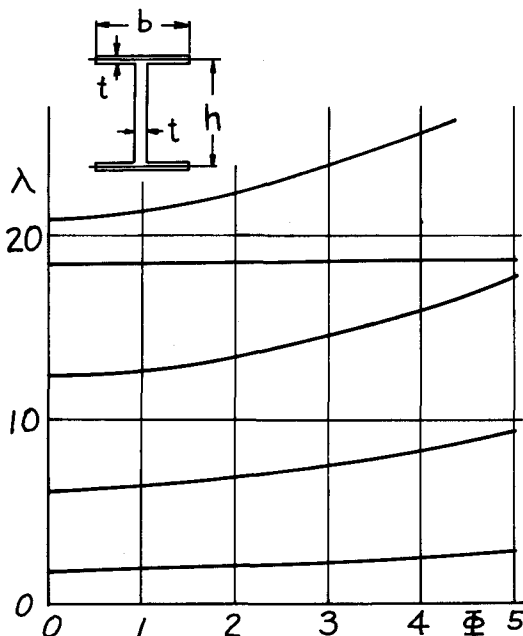


図3 振動固有値 (H型断面)