

(目的)

非対称断面のけたが、動的外力を受けた場合の、曲げねじり連成振動について、動的性状を数値計算によって考察するものである。

(考へ方)

一般に、 x, y 軸について非対称な断面の場合、

外力として、せん断中心軸に沿って分布する、

$$q_x(z, t), q_y(z, t), p(z, t), m_z(z, t),$$

を考へると、

せん断中心での主軸方向の変位、 u, v 、

回転軸方向の変位、 w 、

せん断中心 S の座標、 c_x, c_y 、として、

$$\left. \begin{aligned} EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{A\gamma}{g} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + c_y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \right) &= q_x(z, t) + \frac{I_y \gamma}{g} \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} \\ EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{A\gamma}{g} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - c_x \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \right) &= q_y(z, t) + \frac{I_x \gamma}{g} \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} \\ EI_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{A\gamma}{g} \left(c_y \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - c_x \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + r_s^2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \right) &= m_z(z, t) - \frac{I_w \gamma}{g} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$EA \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\text{こゝに } r_s^2 = r_x^2 + r_y^2 = c_x^2 + c_y^2$$

式(4)は、他の3式とは独立に縦振動を表わし、上の3式中

右辺第2項は、断面の主軸まわりの回転による慣性力の成分を表わしている。振動数の低いところではあまり問題とならないので、簡単にするためこゝでは省略する。

(1)式は断面上の任意の点の変位を

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= u(z) - (y - c_y) \varphi(z) \\ V(x, y, z) &= v(z) + (x - c_x) \varphi(z) \\ W(x, y, z) &= w(z) - x u'(z) - y v'(z) + \varphi(z) w_n(x, y) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

とあつて、エネルギー計算し、仮想仕事から求められた運動方程式である。

マトリックス法で解析する場合、曲げねじり変形に対する剛性マトリックスは、 x, y 軸まわりの曲げ、 w がせん断中心軸まわりのねじり剛性マトリックスを加え合わせるにより求まる。剛性方程式は、

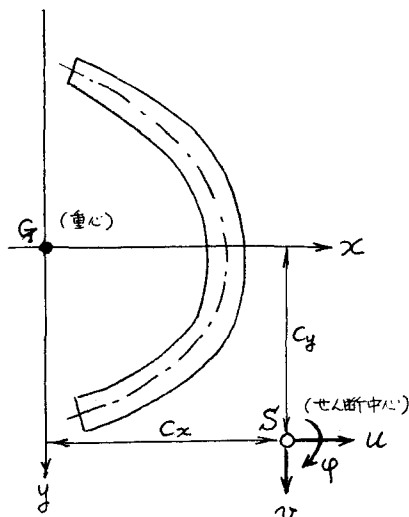
$$\begin{bmatrix} R_u \\ R_v \\ R_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_u & 0 & 0 \\ 0 & R_v & 0 \\ 0 & 0 & R_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} \dots (3)$$

3次の変位関数の場合

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= (H(z)) A^{-1} U \\ v(z) &= (H(z)) A^{-1} V \\ \varphi(z) &= (H(z)) A^{-1} \varphi \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

$$\text{こゝに } H(z) = [1, z, z^2, z^3], \quad U = [u_L, u_L', u_R, u_R']^T \quad \text{となる。}$$

図-1 座標系および記号



曲げねじり振動の方程式は、マトリックス表示を用いてつぎのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{u} + c_y \ddot{\varphi}) + k_u u &= F_u(t) + F_u'(t) \\ m(\ddot{v} - c_x \ddot{\varphi}) + k_v v &= F_v(t) + F_v'(t) \\ m(c_y \ddot{u} - c_x \ddot{v} + I_s^2 \ddot{\varphi}) + k_\varphi \varphi &= F_\varphi(t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

簡単に次式のように書くことができる。

$$M \ddot{d}(t) + K d(t) = F(t) \dots \dots \dots (6)$$

$c_x=0$ の場合、 y 軸まわりの曲げ振動とせん断中心 S まわりのねじり振動が連成し

$$\begin{bmatrix} m & c_x m \\ c_x m & I_s^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_u & 0 \\ 0 & k_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_u(t) + F_u'(t) \\ F_\varphi(t) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

となる。

(結論)

図-2に単純げた断面が y 軸に関して対称な場合の、2重連成振動について振動数 p_n を求めると、振動数方程式は、

$$\frac{I_y}{I_z} \left(\frac{p_n^2}{p_b^2} \right)^2 - \left(1 + \frac{p_\varphi^2}{p_b^2} \right) \frac{p_n^2}{p_b^2} + \frac{p_\varphi^2}{p_b^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{曲げ振動数 } p_b^2 &= \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{EI_x g}{A \delta} \right) \\ \text{ねじり振動数 } p_\varphi^2 &= \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left\{ \frac{GK + EI_w \left(\frac{n\pi y}{L} \right)^2}{I_s} \right\} g \end{aligned}$$

となり、重心に関する2次極モーメント I_y と、せん断中心に関する I_z の比をパラメータとして、 (p_n/p_b) と (p_φ/p_b) の関係を画いた。2つの p_n の中低い方は p_b 、 p_φ のいずれよりも小さく、高い方は常に大きいことがわかる。

図-3では、ねじり定数比 $k = L \sqrt{\frac{GK}{EI_w}}$ を横軸にとり、そりがねじり振動数に及ぼす影響を調べて見ると、そりは回転に対する剛性を増大させるから振動数を高める効果を表わす。

縦軸は、そりを考慮に入れた場合の振動数 p_w と、入れない場合の p_φ の比、

$$\frac{p_w}{p_\varphi} = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{k^2} + 1}$$

を表わし、初めの3つのモードを画いた。

特に k が小さい場合には、 EI_w が GK に比して大きく、そりの影響が無視できない。 $k=4.0$ の1次振動でも振動数は27%高めである。

これに対し k が大きくなると、(けたが長くなるが GK に比して EI_w が小さくなると)そりの影響が小さくなるのがわかる。

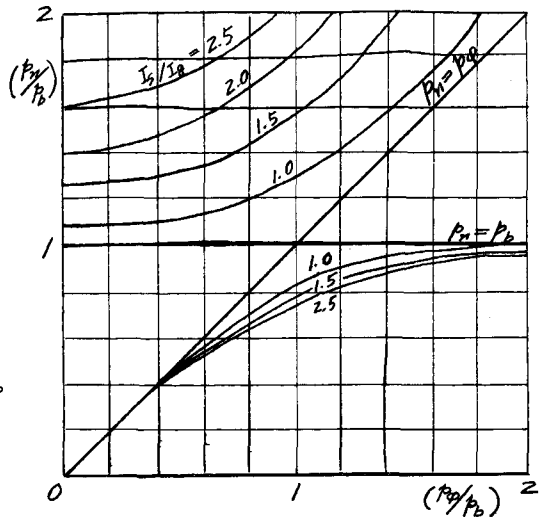


図-2 単純げたの2重連成振動数

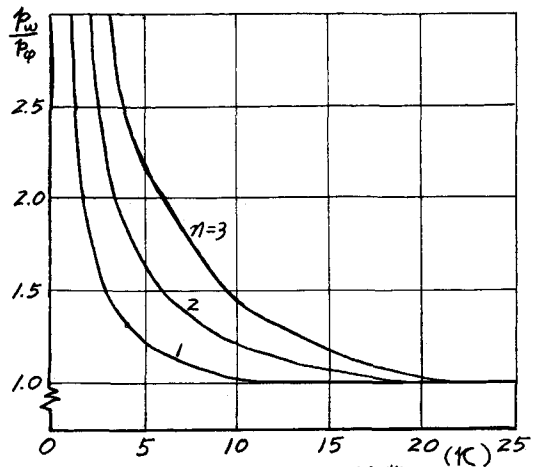


図-3 そりがねじり振動数に及ぼす影響