

北海道大学
北海道大学
日本鋼管

正員
正員
正員

林 川 俊 郎
渡 辺 昇
小 泉 幹 男

1. まえがき

橋梁の上を自動車などが走行するとき橋に生じる動的影響を調べる研究は、平板理論を用いて多くの論文^{1), 2)}が発表されている。しかし、その平板の解析は橋軸方向に両端単純支持されている境界条件の場合がほとんどである。本研究の目的はアフィン荷重展開法³⁾を用いて、格子桁橋のようにねじり剛性が無視できる平板を任意の境界条件について解析する理論の概要について示し、一定荷重が一定速度で走行するとき橋に生じる振動が

境界条件、走行荷重の速度、板の曲げ剛性、幅員、支間長によって、どのように変化するかを調べる。

2. 解析理論の概要

ねじり剛性のない直交異方性板の非減衰振動の基礎微分方程式は、次式により与えられる。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x, y, t) \quad (1)$$

走行荷重 $P(x, y, t)$ および板のたわみ関数 $w(x, y, t)$ を次のように仮定する。

$$P(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y) \quad (2)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y) \quad (3)$$

$$\text{ただし, } X_m(x) = A_m \cos \lambda_m x/a + B_m \sin \lambda_m x/a + C_m \cosh \lambda_m x/a + D_m \sinh \lambda_m x/a \quad (4)$$

$$Y_n(y) = A_n \cos \lambda_n y/b + B_n \sin \lambda_n y/b + C_n \cosh \lambda_n y/b + D_n \sinh \lambda_n y/b \quad (5)$$

λ_m, λ_n は固有値を表わし、 $X_m(x), Y_n(y)$ はそれぞれ x 方向、 y 方向の境界条件を満足している固有関数である(表-1 参照)。固有関数の直交性を利用すると、式(2)より次式を得る。

$$P_{mn}(t) = \frac{\int_0^a \int_0^b P(x, y, t) X_m(x) Y_n(y) dx dy}{\int_0^a X_m^2(x) dx \int_0^b Y_n^2(y) dy} \quad (6)$$

上式(6)は時間 t によって変化するアフィン荷重展開係数である。式(2), (3)を式(1)に代入すると、恒等的に時間 t に関する常微分方程式を得る。

$$\ddot{T}_{mn}(t) + \beta_{mn}^2 T_{mn}(t) = \frac{1}{\rho h} P_{mn}(t) \quad (7)$$

$$\text{ただし, } \beta_{mn} = \sqrt{\{D_x \left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^4 + D_y \left(\frac{\lambda_n}{b}\right)^4\} / \rho h}, \quad ({}'' = d^2/dt^2) \quad (8)$$

式(7)を Laplace 変換により解くと次のようになる。

$$T_{mn}(t) = \frac{1}{\rho h \beta_{mn}} \int_0^t P_{mn}(\tau) \sin \beta_{mn}(t-\tau) d\tau + T_{mn}(0) \cos \beta_{mn} t + \frac{1}{\beta_{mn}} \dot{T}_{mn}(0) \sin \beta_{mn} t \quad (9)$$

ここで、 $T_{mn}(0), \dot{T}_{mn}(0)$ は初期条件によって与えられる積分定数である。したがって、式(9)を式(3)に代入することにより動的たわみ関数 $w(x, y, t)$ が求められる。

($\xi = \lambda_n \cdot X/L$)					
	Boundary con.	Eigenfunction : X_n	K_n	Frequency eq.	$\int_0^L X_n^2 dx$
1		$\sin \xi$	—	$\sin \lambda = 0$	$L/2$
2		$\cos \xi - \cosh \xi$ $-K_n(\sin \xi - \sinh \xi)$	$\frac{\cos \lambda - \cosh \lambda}{\sin \lambda - \sinh \lambda}$	$\cos \lambda \cosh \lambda - 1 = 0$	L
3		$\cos \xi + \cosh \xi$ $-K_n(\sin \xi + \sinh \xi)$	$\frac{\cos \lambda - \cosh \lambda}{\sin \lambda - \sinh \lambda}$	$\cos \lambda \cosh \lambda - 1 = 0$	L
4		$\cos \xi - \cosh \xi$ $-K_n(\sin \xi - \sinh \xi)$	$\frac{\cos \lambda + \cosh \lambda}{\sin \lambda + \sinh \lambda}$	$\cos \lambda \cosh \lambda + 1 = 0$	L
5		$\cos \xi + \cosh \xi$ $-K_n(\sin \xi + \sinh \xi)$	$\frac{\cos \lambda + \cosh \lambda}{\sin \lambda + \sinh \lambda}$	$\cos \lambda \cosh \lambda + 1 = 0$	L
6		$\cos \xi - \cosh \xi$ $-K_n(\sin \xi - \sinh \xi)$	$\frac{\cos \lambda - \cosh \lambda}{\sin \lambda - \sinh \lambda}$	$\tan \lambda = \tanh \lambda$	L
7		$\sin \xi - K_n \sinh \xi$	$\frac{\cos \lambda}{\cosh \lambda}$	$\tan \lambda = \tanh \lambda$	$\frac{1}{2}(1 - K_n^2)$
8		$A_n \cos \xi + B_n \sin \xi$ $+ C_n \cosh \xi + D_n \sinh \xi$	—	$F(\lambda) = 0$	$\frac{1}{2}(A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2)$

表-1 固有関数と固有振動数方程式

また、静的たわみ関数 $w_s(x, y)$ は次式により計算できる。

$$w_s(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (10)$$

ただし、
$$a_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^b P_s(x, y) X_m(x) Y_n(y) dx dy}{\left\{ D_x \left(\frac{\lambda_m}{a} \right)^4 + D_y \left(\frac{\lambda_n}{b} \right)^4 \right\} \int_0^a X_m^2(x) dx \int_0^b Y_n^2(y) dy}$$

3. 計算例

数値計算例として、箱主桁鋼床版にみられるブラケットのように揺動方向には片持支持、橋軸方向については両端単純支持または両端固定支持の境界条件をもつ平板について考える。図-1は橋軸方向が単純支持の場合で集中荷重 $P=20$ t が一定速度 $V=60$ km/hr で板中央を移動するときの着目点、 $(x=a/2, y=b)$ における動的たわみの影響線を示したものである。

ここで、橋の動的影響を調べるために式(11)で定義される動的増加率 (D. A. F.) とし、

$$\lambda = (w_d - w_s) / w_s \times 100 \quad (11)$$

ただし、 w_d : 動的最大たわみ値

w_s : 静的最大たわみ値

次式(12)で定義されるパラメーター θ を用いる。

$$\theta = \omega_1 / \beta_{11} \quad (12)$$

ただし、 $\omega_1 = \lambda x_1 V / a$

$$\beta_{11} = \sqrt{\left\{ D_x \left(\frac{\lambda x_1}{a} \right)^4 + D_y \left(\frac{\lambda y_1}{b} \right)^4 \right\} / P R}$$

この ω_1 は橋軸方向の固有値 λx_1 と速度 V と支間長 a によって与えられ、 β_{11} は板の第1次固有振動数である。

図-2は幅員 $b=10$ m と一定にし、速度 V と支間長 a を変化させたときの動的増加率 λ の影響を示したものである。速度 V が減少するにつれて、また支間長 a が増加するにつれて動的増加率 λ は減少する傾向にある。

図-3は支間長 $a=30$ m、幅員 $b=10$ m と一定にしてパラメーター θ と動的増加率 λ の関係を示したものである。実際の鋼床版等におけるパラメーター θ の範囲はおおよそ $0.05 \sim 0.20$ である。したがって、図-3より橋軸方向の境界条件が両端固定支持 (B) よりも両端単純支持 (A) の方が動的増加率 λ は大きい。本計算には北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-75 を使用した。

- 1) N. J. Huffington and W. H. Hoppmann: On the transverse vibrations of rectangular orthotropic plates, Journal of Applied Mechanics, vol. 25, 1958, pp. 389~395
- 2) 平井一男: 移動荷重を受ける相対2辺単純支持、他の2辺自由なる直交異方性板の振動性状について、土木学会論文報告集, No. 92, 1963-4, pp. 1~10
- 3) 小泉幹男, 渡辺昇, 金子孝吉: アフィレ荷重の構造力学への応用に関する研究(その3), 第31回土木学会年次学術講演会講演概要集(第1部), 1976, pp. 1~2

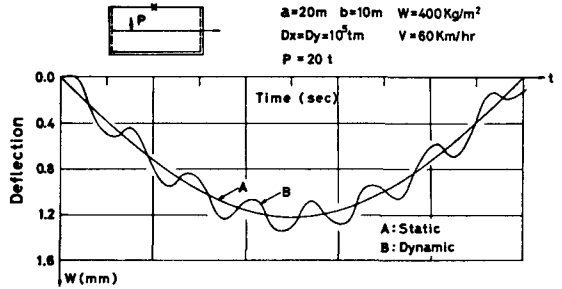


図-1 静的および動的たわみの影響線

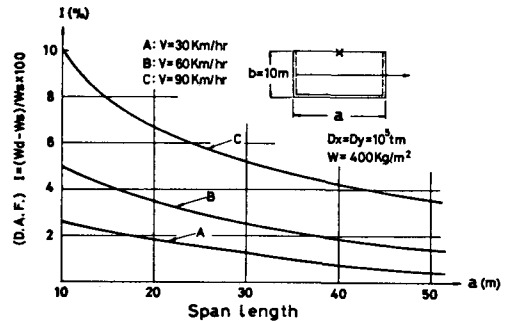


図-2 動的増加率と支間長

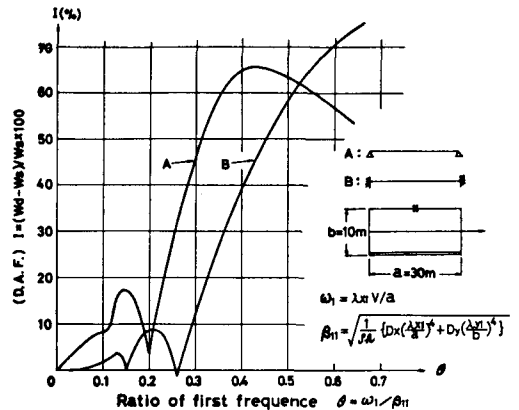


図-3 動的増加率とパラメーター θ