

1. 序論 橋梁の走行荷重による応答解析に関しては、従来多くの研究がなされてきたが、近年再び、路面の不規則凹凸を考慮した応答解析として研究されている⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。この解析は、路面凹凸を実測から求めたパワースペクトル密度と有する確率過程と考え、これを外力とする橋梁-車輛系の応答を不規則振動論を用いて行うものである。ところで、橋梁-車輛系を記述する運動方程式は時変係数系の微分方程式で記述されるので、路面凹凸による応答は非定常過程になる。従来の不規則振動論による手法では、このような時変係数を有する系の解析を行うために、何らかの仮定を必要とした。本研究では、時間微分が定義できて、さらに実測のパワースペクトル密度を有する確率過程として、白色雑音過程を入力とする外力系を導入し、外力系と橋梁-車輛系を1つの系と考え、伊藤形の線形確率微分方程式で表現する。次に、確率微分方程式より誘導される共分散方程式を基礎式として共分散応答を解析する。この解法では、路面凹凸による車輛の定常共分散応答を橋梁に進入する車輛の初期条件と考えると、これを考慮した解析が可能となる。本法の妥当性をシミュレーションにより検討した結果、良好な一致の確認できた。

2. 橋梁-車輛系の運動方程式および路面凹凸 図1に示したように、1自由度系でモデル化した車輛が、橋梁を通過する際の橋梁-車輛系の運動方程式について述べる。橋梁のA点の変位を $y(x,t)$ 、車輛の変位を $z(t)$ さらに路面凹凸を $n(t)$ とすると、車輛系の運動方程式は次式で与えられる。ただし、ばね下質量はばね上質量と比して無視できると仮定する。

$$W_1 \ddot{z}(t) + C(\dot{z}(t) - \dot{y}(x,t) - \dot{n}(t)) + P(z(t) - y(x,t) - n(t)) = 0 \quad (1)$$

ここに、 C ：減衰係数、 k ：ばね定数、車輛の全接地力を $P(t)$ とすると、これは次式になる。

$$P(t) = W_1 (\ddot{q} - \ddot{y}(x,t)) \quad (2) \quad \text{橋梁系では、} n \text{ 次の}$$

基準関数 $\phi_n(x)$ 、基準座標を $g_n(t)$ とする。変位は次式で示される。

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) g_n(t) \quad (3)$$

$$\ddot{g}_n(t) + 2h_n \omega_n \dot{g}_n(t) + \omega_n^2 g_n(t) = g_n(x,t) P(t) / M_n^* \quad (4) \quad \text{ただし、} h_n$$

ω_n は各々 n 次の減衰定数および固有円振動数であり、 M_n^* は次式で示される量である。

$$M_n^* = \int_0^L \phi_n^2(x) dx \quad (5) \quad \text{次に路面凹凸とそのモデル化について述べる。路面凹凸のパワースペクトル密度は実測より図2に示されるが、}$$

これは次式になることが知られている。

$$S_R(\Omega) = a \Omega^{-n} \quad (6)$$

走行速度 v を一定とすると、 $\Omega = \omega / 2\pi v$ であり、 Ω を ω に変換すると、

$$S_R(\omega) = S_R(\Omega) / 2\pi v \quad (7) \quad \text{これより(6)式は次式になる。} \quad S_R(\omega) = a (2\pi v)^{n-1} \omega^{-n} \quad (8)$$

ここで、 $n = 2.0$ 、 $a = 10^{-3} \text{ cm}^3/\text{m}/\text{c}$ とする。ところで、(8)式のパワースペクトル密度は $\omega \rightarrow 0$ で $S_R(\omega) \rightarrow \infty$ となり現実的でない。そこで(9)式の代りに次式で示されるパワースペクトル密度を用いる。

$$S_R(\omega) = S_0 / (\omega^2 + \alpha^2) \quad (9)$$

ただし、 S_0 は $2\pi a v$ 、 α は実験的に求められるパラメーターであるが、実測値を検討して $\alpha = 0.05$ を用いた。(8)式は白色雑音過程が作用する1階の微分方程式の定常解過程に対するパワースペクトル密度として得られる。

$$\dot{n}(t) + \alpha n(t) = w(t) \quad (10)$$

$w(t)$ は平均値0、分散 S_0 を有する白色雑音過程。

(10)式を外力系と称して、(1)、(4)、(8)から確率微分方程式を構成する。

3. 共分散方程式について 橋梁を1自由度系と仮定し、次式の状態ベクトルを用いると、橋梁-車輛-外

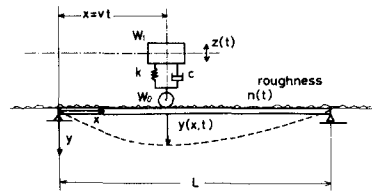


図1

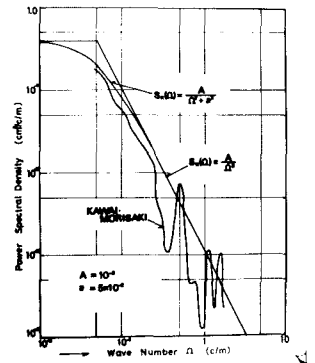


図2 路面凹凸のパワースペクトル

力系は伊藤形の確率微分方程式になる。 $X(t) = \{z_1, z_2, z_1, z_2, z_3\}$ (11) ここに、 $z_1 = \delta, z_2 = \dot{\delta}, z_1 = z_1, z_2 = \dot{z}_1, z_3 = \eta(t)$ である。 $\dot{X}(t) = A(t)X(t) + D(t)W(t)$ (12)

$A(t), D(t)$ は係数行列、 $W(t)$ は白色雑音過程ベクトルで、次の性質を有する。 $E[W(t)] = 0, E[W(t)W(t)^T] = Q(t)\delta(t-\tau)$ 。(12)式に対する共分散方程式は次式になる。 $R_X(t) = A(t)R_X(t) + R_X(t)A(t)^T + D(t)Q(t)D(t)^T$ (13) ただし、 $R_X(t) = E\{X(t)X(t)^T - E[X(t)]E[X(t)]^T\}$ 。 $X(t)$ を橋梁系 $Y(t)$ と車輪-外カ系 $Z(t)$ に分離すると、(12)式のベクトルおよび行列は次式で表される。

$$X(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \quad A(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix} \quad D(t) = \begin{bmatrix} D_{11}(t) & D_{12}(t) \\ D_{21}(t) & D_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$W(t) = \begin{bmatrix} W(t)_1 \\ W(t)_2 \end{bmatrix} \quad (14) \quad \text{さらに、} X(t) \text{ および } W(t) \text{ の共分散を分割すれば次式になる。}$$

$$R_X(t) = \begin{bmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) \\ R_{21}(t) & R_{22}(t) \end{bmatrix} \quad S_X = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

共分散行列は対角行列になるので、(13)式の独立な微分方程式は、 $R_X(t)$ の三角要素で記述される。

$$\begin{aligned} \dot{R}_{11}(t) &= A_{11}(t)R_{11}(t) + A_{12}(t)R_{21}(t) + R_{11}(t)A_{11}(t)^T + R_{12}(t)A_{12}(t)^T + D_{11}(t)S_{11}D_{11}(t)^T \\ \dot{R}_{12}(t) &= A_{11}(t)R_{12}(t) + A_{12}(t)R_{22}(t) + R_{11}(t)A_{21}(t)^T + R_{12}(t)A_{22}(t)^T + D_{11}(t)S_{12}D_{21}(t)^T \\ \dot{R}_{21}(t) &= A_{21}(t)R_{11}(t) + A_{22}(t)R_{21}(t) + R_{21}(t)A_{11}(t)^T + R_{22}(t)A_{12}(t)^T + D_{21}(t)S_{11}D_{11}(t)^T \\ \dot{R}_{22}(t) &= A_{21}(t)R_{12}(t) + A_{22}(t)R_{22}(t) + R_{21}(t)A_{21}(t)^T + R_{22}(t)A_{22}(t)^T + D_{21}(t)S_{12}D_{21}(t)^T + D_{22}(t)S_{22}D_{22}(t)^T \end{aligned}$$

---- (16) 初期条件は、路面凹凸により定常状態に達した値 $R_2(t_0)$ を用いる、他の $R_{11}(t_0), R_{12}(t_0)$ は各々0である。

4. 数値計算 厳密に橋梁と車輪の連成を考慮した解析を連成モデル、これに対し従来の解析を非連成モデル、さらに、連成を考慮した定常解析を定常モデルと称し、それらの比較を行う。図3及び図4は走行速度 $v=10$ (m/sec)の車輪によるスパン長50, 30 (m)の単純桁橋の共分散方程式による解とシミュレーションの比較である。非連成モデルによる解はそのモデルに

対応したシミュレーションに一致するが、実際のシミュレーションには一致しない。これに対して、連成モデルの解は良い一致を示している。図5は、橋梁と車輪の固有振動数比を変化させた場合の連成モデルの応答曲線であるが、 $f_1/f_0 = 1$ 近傍になると大きく変動する曲線に移行する。 $f_1/f_0 > 1$ でも同じ傾向になる。図6はスパン長に対する各モデルの最大rms速度応答を示したものである。 $L=30$ において橋梁と車輪の固有振動数比は最も接近する。非連成モデルの解は全てのスパンに対して過大である、特に固有振動数比が一致する近傍で著しい。定常モデルによる解は連成モデルに近い値を示すが、スパンが長くなると各モデルの解は一定値に漸近する傾向があることがわかる。

[参考文献] (1)小堀 昭和42.12.土木学会論文集, (2)小堀, 梶川 1976年4月土木学会論文集, (3)吉村, 斎坂, 内谷 1977年2月土木学会論文集

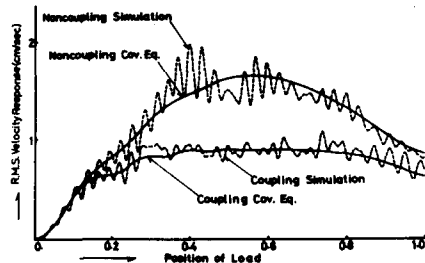


図3 解析解とシミュレーションの比較

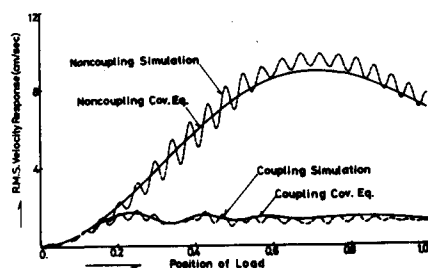


図4 解析解とシミュレーションの比較

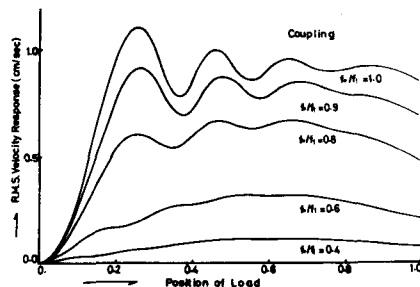


図5 固有振動数比の影響

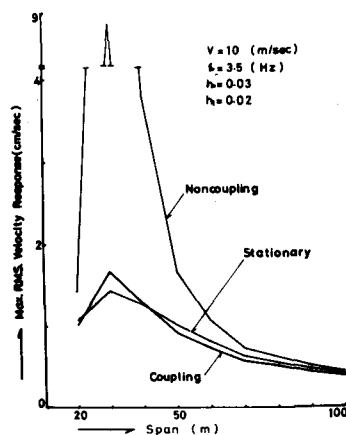


図6 スパン長の影響