

北海道大学工学部 学生員 ○ 山本 茂
北海道大学工学部 正 員 能町純雄

1. まえがき 一般に走行荷重による桁や板の振動問題では、荷重が構造物とともに振動することによる荷重の慣性力は無視されることが多いが、荷重質量および走行速度が大きくなればこの慣性力は無視できなくなると考えられる。巷間、広く用いられている振動形解析法により、この荷重慣性力を考慮しようとするれば、高次振動を考えることによって複雑な問題となる。そこで本研究では振動形解析法とは異なった手法により、板の振動解析を試み、板の応答たわみに及ぼす荷重の慣性力の影響を明らかにした。

この荷重慣性力は荷重の質量と載荷点の加速度との積であり、そして載荷点加速度は時間のみの関数であるから、載荷点たわみを時間で全微分すべきである。これを近似的に時間で偏微分することもある。本研究ではこの比較を行なった。

また、正弦波分布荷重が無限長板を走行しているとき、載荷点加速度は全微分を用いればゼロになり、偏微分を用いればゼロにならないという例を紹介する。

2. 解析理論 図-1 のような四辺単純支持された矩形板(長さ: a , 幅: b , 厚さ: h , 密度: ρ , 剛性: D) 上を正弦波分布荷重 $q_0 \sin \frac{\pi y}{b}$ が一定速度 c で走行する場合を考える。

たわみを $w(x, y, t)$ とすると、荷重の慣性力を考慮した板の振動方程式は次式で示される。

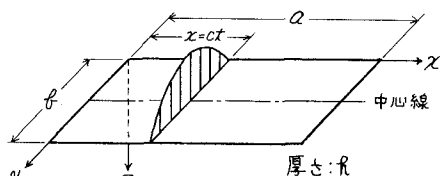


図-1. 正弦波分布荷重が走行する四辺単純支持板

$$D \Delta^2 w + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left\{ q_0 \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{q_0}{g} \sin \frac{\pi y}{b} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2c \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} \delta(x-ct) \quad \text{----- (1)}$$

ただし、 δ はディラックのデルタ関数

ある時刻 t に于けるたわみ曲線を、 $x=ct$ に荷重が載荷しているときの静たわみ曲線に時刻 t の関数である倍率 $f(t)$ をかけたものと仮定する。すなわち、

$$w(x, y, t) = f(t) \frac{2q_0}{aD} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi ct}{a} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}}{\left\{ \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} = W(x, t) \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \quad \text{----- (2)}$$

$W(x, t)$ は板中心線 ($y = \frac{b}{2}$) に于けるたわみである。

(1) 式の両辺にたわみ w を乗じ、 x について $0 \sim a$, y について $0 \sim b$ までは積分すれば次式が得られる。

$$q_0 \cdot W_{x=ct} - \frac{2q_0}{3} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2c \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} + c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{x=ct} \cdot W_{x=ct} - \rho S \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot w \, dx = f(t) \cdot W_{x=ct} \quad \text{----- (3)}$$

(2) 式によって示された w を (3) 式に代入すれば、次のような $f(t)$ の二階常微分方程式が得られる。

$$q_1(t) \cdot \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + q_2(t) \cdot \frac{df(t)}{dt} + q_3(t) \cdot f(t) = q_4(t) \quad \text{----- (4)}$$

$q_i(t)$ は級数の和であるが、すべて閉じた式にすることができ、(4) 式は初期条件 $t=0$ で $f(t)=0$, $\frac{df(t)}{dt}=0$ が与えられると、差分法により数値的に解くことができ、時々刻々に于ける $f(t)$ の値が求められる。

3. 数値計算例 $a=30 \text{ m}$, $b=6 \text{ m}$, $h=30 \text{ cm}$ のコンクリート板を用いる。材料定数は $E=3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ 単位体積重量 $\gamma_c=2.35 \text{ ton/m}^3$, ポアソン比 $\nu=0.2$ とする。荷重重量は 32 ton (板の 0.3 倍) とする。

種々の走行速度に対して、最大たわみを求め、これを静的最大たわみとの比で表わしたところ、表-1 のようになった。CASE(A-1)は荷重慣性力を考慮し、載荷点加速度はたわみを全微分した場合であり、CASE(A-2)は

荷重慣性力を考慮するが、載荷点加速度はたわみを時間で偏微分して $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(x=ct)$ とした場合である。CASE(B)は荷重の慣性力を無視した場合である。これより、 $C=50$ m/sec 以下では全微分加速度で荷重慣性力を考慮すると、最大たわみは荷重慣性力を無視した場合より、むしろ小さくなるが、偏微分加速度で荷重慣性力を考慮すると、最大たわみはかなり大きな値となることがわかる。

CASE	A-1	A-2	B
速度			
10 m/sec	1.004	1.010	1.021
20	1.031	1.104	1.042
30	1.039	1.174	1.065
40	1.041	1.257	1.090
50	1.103	1.377	1.116
60	1.211	1.561	1.141

表-1. 動的最大たわみ/静的最大たわみ

$C=60$ m/sec では、全微分加速度で荷重慣性力を考慮した場合の最大たわみは、これを無視した場合のその6%ほど大きな値となるが、偏微分加速度を用いた場合は37%も大きくなる。

図-2 は荷重が60 m/secで走行するとき、荷重が位置した地点のその点のたわみをプロットしたものである。

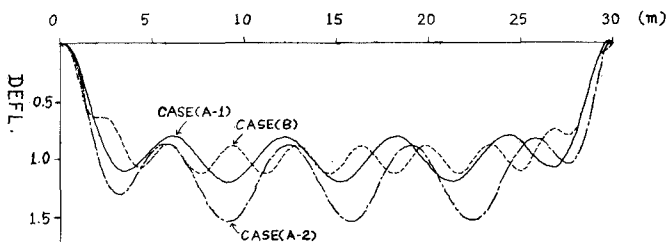


図-2. $C=60$ m/sec での荷重載荷点たわみ ($\nu=\frac{1}{2}$)

4. 無限長板 図-1 において長さ a を無限にした板を想定する。この無限長板を正弦波分布荷重 $q_0 \sin \frac{\pi y}{b}$ が一定速度 C で走行している状態の微分方程式は (1) 式と同様である。(1) 式に $W=W(x,t) \sin \frac{\pi y}{b}$ を代入すると、次式が得られる。

$$D \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \frac{\partial W}{\partial x^2} + \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 W \right\} + R \delta \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \left\{ q_0 - \frac{R}{\delta} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2C \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} + C^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \right\} \delta(x-ct) \quad \text{----- (5)}$$

移動座標 $X=x-ct$ を採用すると、 $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$ であり、また

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2C \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} + C^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{x=ct} = C^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - 2C^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + C^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0 \quad \text{----- (6)}$$

となり、荷重載荷点の加速度はゼロである。(5) 式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \left\{ \frac{CR\delta}{D} - 2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right\} \frac{\partial W}{\partial X^2} + \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 W = \frac{q_0}{D} \delta(X) \quad \text{----- (7)}$$

$X \leq 0$ なる区間での W を W_1 , $X \geq 0$ なる区間での W を W_2 とし、次のような境界条件

$$X \rightarrow -\infty \text{ で } W_1 = 0, \quad X \rightarrow +\infty \text{ で } W_2 = 0$$

$$X = 0 \text{ で } W_1 = W_2, \quad \frac{\partial W_1}{\partial X} = \frac{\partial W_2}{\partial X}, \quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial X^2}, \quad -\frac{\partial^3 W_1}{\partial X^3} = \frac{q_0}{D} - \frac{\partial^3 W_2}{\partial X^3}$$

により、 W_1, W_2 を求めると、これらは $X=0$ に関して対称であり、 W_2 を示すと

$$W_2(X) = \frac{q_0}{E} \frac{3(1-\nu^2)}{(\pi R)^2} e^{\frac{\sqrt{1-R^2} \pi X / b}{\sqrt{1-R^2}}} \left\{ \frac{1}{R} \sin \frac{\pi R X}{b} + \frac{1}{\sqrt{1-R^2}} \cos \frac{\pi R X}{b} \right\} \quad \text{ただし } R = \frac{C}{C_0} \frac{b \sqrt{3(1-\nu^2)}}{R}, \quad C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8)$$

荷重載荷点加速度を全微分加速度としない、偏微分加速度 $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$ とすれば、これはゼロではないから、(7) 式の右辺に $-\frac{R}{\delta} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$ を付け加えて解けば $W_2(X)$ は (8) 式に $1 / (1 - \frac{R}{\pi \delta \rho R} \frac{R^2}{\sqrt{1-R^2}})$ を乗じたものとなる。この倍率は $C=20$ m/sec で 1.029, $C=60$ m/sec で 1.340 となり、偏微分加速度で荷重慣性力を考慮すれば、やはり応答が大きくなることがわかる。

5. むすび 板の振動問題において、荷重の慣性力を考慮する場合、荷重載荷点加速度を偏微分加速度とすれば、全微分加速度としたときよりも、応答たわみは大きくなる。

参考文献 Steuding, H.: Die Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten. Ing.-Arch. 5 (1934)

Tschauner, J.: Die Durchbiegung eines Balkens unter einer bewegten Last. Ing.-Arch. 42 (1973)

小坪清真: 土木振動学 (森北出版)