

北大 工学部 学生員 ○ 須藤 典助  
北大 工学部 正 員 能 町 純雄

## 1 まえがき

はりに走行荷重が作用する場合、荷重による慣性力やバネ力などいろいろな要素を考慮したはりの解法については多くの研究があるが、ほとんど、1次の振動モードのみを用いて解析が行なわれている。それは、高次の振動を考慮すると計算がきわめて繁雑になり、また1次の振動モードだけで十分な精度をもつからと考えられる。

本論文では、集中荷重がバネを介して単純ばりに作用しつつ走行する場合を取り扱い、モーダルアナリシスとは別の観点に立ち、振動解析に仮想仕事の原理を拡張したもので、応答変位を倍率関数に静的たわみ関数を乗じたものとして取り扱う方法によったものである。

## 2 解析方法

図-1に示すように、単純ばり上をバネ上荷重 $W_1$ 、バネ下荷重 $W_2$ 、バネ定数 $k$ なる走行荷重が作用したとき、はりの振動方程式は次のように表わされる。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + AP \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = W_0 + W_1 - \frac{W_0}{g} \frac{d^2 y_0}{dt^2} + k(y_0 - y_1) \quad \text{---(1)}$$

ここで、添字 $0$ は走行荷重の位置( $x=vt$ )を表わす。

また、静的問題で、 $x=a$ に単位荷重が作用したとき、そのたわみ曲線を $\bar{y}_{sa}$ とすると次の関係がある。

$$EI \frac{\partial^4 \bar{y}_{sa}}{\partial x^4} = 1 \times \delta(x-a) \quad \text{---(2)}$$

$\delta(x-a)$ はディラックのデルタ関数である。

(1)式で、はりの慣性力を右辺に移項すると、右辺はこの系全体に及ぼす全外力 $Q$ である。いま外力 $Q$ による内力を $\sigma$ 、 $\bar{y}_{sa}$ によるひずみ $\epsilon$ とすると、仮想仕事の原理から

$$\int_0^l Q \bar{y}_{sa} dx = \int_0^l \sigma \epsilon dx = \int_0^l EI \frac{\partial^4 \bar{y}_{sa}}{\partial x^4} y dx = y_a \quad \text{---(3)}$$

ここで、 $y_a$ は時刻 $t$ における $a$ 点の動的たわみである。よって(3)式は

$$\int_0^l \left\{ W_0 + W_1 - \frac{W_0}{g} \frac{d^2 y_0}{dt^2} + k(y_0 - y_1) - AP \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\} \bar{y}_{sa} dx = y_a \quad \text{---(4)}$$

また、バネ上荷重 $W_1$ のたわみ $y_1$ についての振動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{W_1}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + k y_1 = k y_0 \quad \text{---(5)}$$

よって、動的たわみ $y$ は、(4)(5)式の連立方程式として解かれる。本論文では、動的たわみ $y$ を静的たわみに応答倍率を乗じたものと仮定し、次のように与える。

$$y(t, x) = h(t) \cdot \bar{y}_s(t, x) = h(t) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{EI \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4} \quad \text{---(6)}$$

(6)式を(4)式に代入して積分を行ない、 $h(t)$ について整理すると次のようになる。

$$\alpha_1(t) h''(t) + \alpha_2(t) h'(t) + \alpha_3(t) h(t) = \beta(t) \quad \text{---(7)}$$

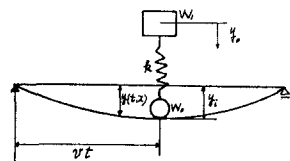


図-1

係数  $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$  は振数係数であるが、ここに現われる級数の和はすべて代数式を以て表わすことができる。数値解析には、 $f(0)=0$ 、 $\dot{f}(0)=0$  の初期条件のもとに差分法により解くこととする。

### 3 計算例および考察

スパン長  $30\text{m}$ 、曲げ剛性  $4.4 \times 10^{12} \text{kg-cm}^2$ 、断面積  $393\text{cm}^2$  なる単純ばりを  $10\text{m}$  の集中荷重 (バネを有する場合は、 $W_0 = 1\text{ton}$ ,  $W_0 = 9\text{ton}$ ) が走行するときのスパン中央における応答変位を計算した。表-1 は、本方法とモーダルアナリシスとの結果を比較したもので、単純ばり上を慣性力の無い集中荷重が走行する場合である。モーダルアナリシスは  $100$  次の振動モードまで取った。表より十分な精度で本方法が適用できることがわかる。図-2 は走行集中荷重の慣性力をも考慮した場合の結果を示している。慣性力については、時間の偏数分加速度で取り扱う方法と、全微分加速度で取り扱う方法が行なわれているが、数値計算によってその比較を行なったものである。予想されたことであるが、全微分加速度を用いると荷重が後半部を走行する時点において、スパン中央の変位は、かなりの増加を示す。図-3 は、バネを有する荷重が走行する場合で、このときバネ下荷重について全微分加速度および偏数分加速度を用いた。 $W_0/m_0 = 9$  としているので両方法に及ぼす影響が少ないため、図-2 のような顕著な差がみられない。以上より、本方法は、近似解法ではあるが高次振動の影響を含む計算を各モードごとの変位を重ね合わせることなく計算できるので、モーダルアナリシスがきわめて複雑になるような振動問題を取り扱うことができる。

表-1 モーダルアナリシスと本方法の変位比較

| 荷重位置      | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ |
|-----------|---------------|---------------|---------------|
| 本方法       | 0.4735cm      | 1.8828cm      | 1.2366cm      |
| モーダルアナリシス | 0.4766cm      | 1.8795cm      | 1.2379cm      |
| 誤差(%)     | 0.64%         | 0.17%         | 0.11%         |

参考文献 小坪清真 : 土木振動学

J. Tschauner : Die Durchbiegung eines Balkens unter einer bewegten Last (Ing.-Arch 42 (1973))

H. Stending : Die Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten (Ing.-Arch 5 (1934))

図-2 バネ無し荷重が走行する場合のスパン中央点の動的変位の静的最大変位に対する比

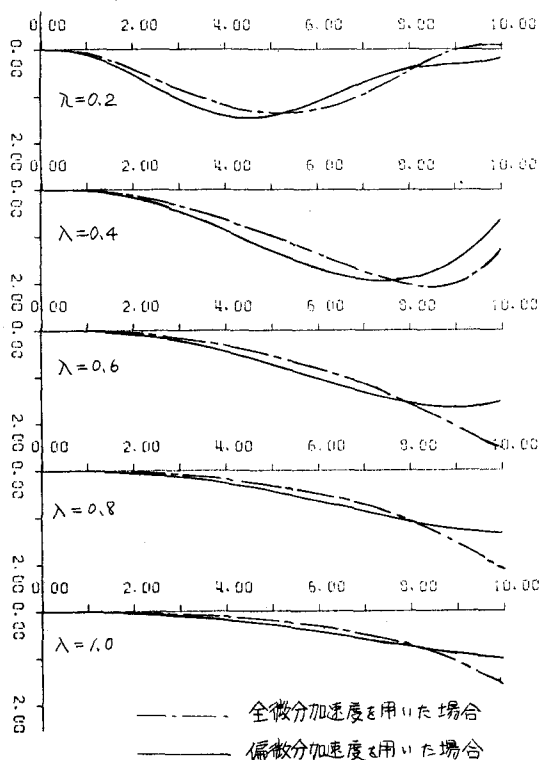
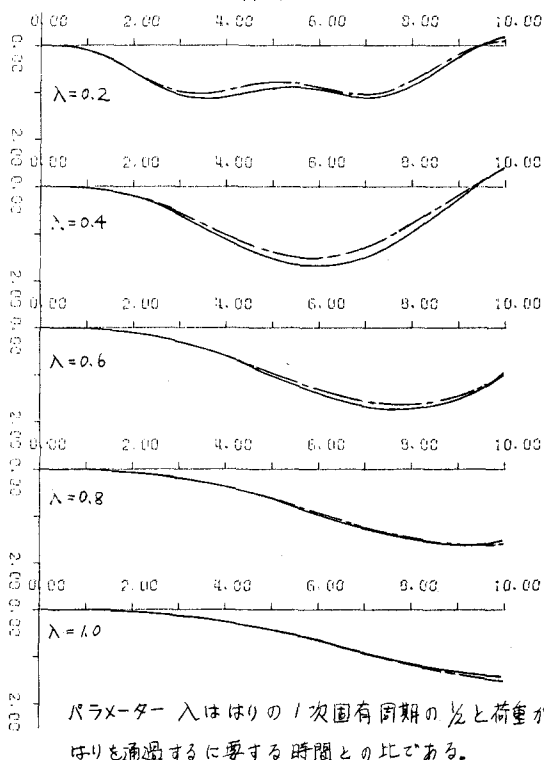


図-3 バネを有する荷重が走行する場合のスパン中央点の動的変位の静的最大変位に対する比



パラメーター  $\lambda$  ははりの 1 次固有周期の  $\frac{1}{\lambda}$  と荷重がはりを通過するに要する時間との比である。