

1. はじめに

構造設計手法が単一の安全率を軸とした許容応力度設計法から、強度、荷重等各変数個々に安全係数をかける荷重係数設計法あるいはそれとほぼ等価な設計法に移行するのが世界的な勢といえよう。その移行作業の中で構造信頼性理論が全面的ではないが理論的根拠として重要な位置を占めている。これはここ10年、2次モーメント法を中心とした信頼性設計法に集まる研究の成果によるものといえよう。構造信頼性の研究で純理論的なものと並行して、最近では実際の設計法を念頭におく実用的な研究が多いのが特長である。しかし、これらの研究の殆んどは確率論の基盤に立ったものである。すなわち設計に關与するランダム変数のパラメーター i.e. 平均、分散、ときには分布形が既知であるとしている。実際にはこれらのパラメーターはいくつかの標本値より統計的手法により推定されるのが普通である。推定されたパラメーター値に伴う統計的不確定性についての、この分野における研究は少ない。^{1,2)} 本報告では、まず信頼性設計での統計的不確定性の取り扱い法を明確にする。次にこれらの方法をいろいろな分布形に適用し、そして最後に風速観測値に基づく設計風速決定の問題を応用例として示す。

2. 統計的不確定性の取り扱い

実用的な信頼性設計法では、設計に關与する確率変数 X (例えは強度、荷重)に対して設計値 X^* はある確率 $P(0 < P \leq 1)$ (fractile)を有するよう決められる。^{3,4)} すなわち

$$\text{Prob}[X \geq X^*] = P \quad (1)$$

もし X が強度なら P は1に近く、荷重なら0に近い値となる。またこの X^* は X の平均 μ 、分散 σ^2 を用いて

$$X^* = \mu + k\sigma \quad (2)$$

と表わすこともできる。 k は P によって決まる数である。荷重係数設計法も式(2)の特別な形とみることが出来る。

几个より成る標本値 $D_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ があるとき、これらの値よりどのようにして $X = X_{n+1}$ に対する X^* を決めたらよいかがこの問題となる。これに対しベイズ法、サンプリング法の2つの統計的手法が適用可能と思われる。ここでは前者の方法で行なう。すなわち変数 X の分布形が既知(あるいは仮定)とした上で、平均、分散のようなパラメーターの統計的不確定性を考慮した上で式(1)を満たす解を求め、Frequentist, Fiducialist, Bayesian 3つの立場をとることが出来るが、ここではFrequentist, Bayesianの2つの立場から考える。⁵⁾

Frequentistによる方法 この方法では設計値 X^* が標本値 D_n の関数 $X^* = X^*(D_n)$ として、 $X^*(D_n)$ は

$$E[\text{Prob}[X \geq X^*(D_n)]] = \int_{\text{all } D_n} f_{D_n|\xi}(D_n|\xi) \int_{X^*(D_n)}^{\infty} dF_{X|\xi}(X|\xi) dD_n \quad (3)$$

が P となるように選ばれる。ここで F, f は各々確率分布、密度関数であり、 ξ は分布形の既知でないパラメーターである。これはつまり標本空間内で $X^*(D_n)$ は平均 P のfractileを有するという事である。逆に、個々の標本値 D_n に対しては $X^*(D_n)$ はfractile P を保証するものではないということである。

Bayesianによる方法 既知でないパラメーター ξ をランダム変数とみて、ベイズの定理をあてはめれば

$$f(\xi|D_n) \propto f(\xi) \cdot l(\xi|D_n) \quad (4)$$

となる。ここで $f(\xi|D_n)$ は標本値 D_n が与えられた時の ξ の事後分布、 $l(\xi|D_n)$ は ξ に關する尤度関数、そして $f(\xi)$ は D_n が与えられる前の ξ の事前分布である。式(4)より $X = X_{n+1}$ の事後分布 $f(X|D_n)$ は

$$f(X|D_n) = \int_{\text{all } \xi} f_{\xi}(X|\xi) f(\xi|D_n) d\xi \quad (5)$$

と与えられ、式(1)を満たす設計値 X^* が求められる。Frequentistによる方法では ξ は既知か、既知でないのどちら

かであるが、Bayesianの方法ではその中間が許される。事後分式(4)を求める際に、事前分布(5)は其様な分布形を選んでよくと数学的取り扱いが極めて容易となる。

Xが正規分布の場合 標本値 D_n より標本平均 $\bar{X}_n$, 標本(不偏)分散 S_x^2 を

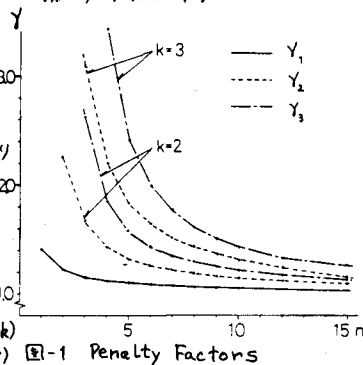
$$\bar{X}_n = \sum X_i / n, \quad S_x^2 = \sum (X_i - \bar{X}_n)^2 / (n-1) \quad (6)$$

と定義する。正規分布の場合は μ, σ を μ, σ の3つのケースが有り得る。各々の場合、設計値 X^* を式(2)になり、

$$X_1^* = \bar{X}_n + \gamma_1 k \sigma, \quad X_2^* = \mu + \gamma_2 k S_x, \quad X_3^* = \bar{X}_n + \gamma_3 k S_x \quad (7)$$

とした時、Frequentistによる方法では式(1)より

$$\gamma_1 = (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} (n \geq 1), \quad \gamma_2 = t_n(\Phi(-k)) / \Phi(-k) (n \geq 2), \quad \gamma_3 = (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} t_{n-1}(\Phi(-k)) / \Phi(-k) (n \geq 3) \quad (8)$$



となる。^{2,6)} ここで $\Phi(\cdot)$ は標準正規関数、 $t_n(\cdot)$ は n 自由度のt確率分布関数である。 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ はpenalty factorであり、いろいろな n, k に対して示したのが図-1である。Bayesianによる方法では3つのケースについて正規型、ガンマ型、正規-ガンマ型の其様な事前分布を採用すると設計値 X^* が式(8)のような陽の形で求まる。その解はここでは略す。また各々、そのnoninformativeな事前分布に対してはFrequentistによる解と一致する。もし変数 X が許数正規分布をなるときは、 $Y = \ln X$ という変換により正規分布の場合に帰着する。

Xが極値I型(Maxima)分布(Gumbel分布)の場合 X の分布関数 $F(x)$ は

$$F(x) = \exp\{-\exp[-(x-a)/b]\} \quad (9)$$

で与えられ、パラメータ a, b ともに既知でないとする。標本値 D_n より求める a, b の最尤値(Maximum Likelihood Estimate)を $\hat{a}, \hat{b}$ とする。このとき $E = (X_{nn} - \hat{a}) / \hat{b}$ という統計量が n のみに依存することを利用して、式(1)をみたす設計値 X^* を

$$X^* = \hat{a} + k_E \hat{b}$$

と置く。Frequentistによる解は解析的には求らず、Antleらはシミュレーションに表-1に示す k_E の値を得た。⁷⁾ Bayesianによる解は同様にシミュレーションにより求められることになる。極値II型(Weibull)分布の場合は変換 $Y = \ln X$ により極値I型に置き換えるので表1を利用できる。

表1 極値I型分布における k_E 値

n, P	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
10	2.64	3.59	4.51	6.00	
20	2.41	3.24	4.04	5.12	6.18
30	2.33	3.06	3.89	4.90	5.96
∞	2.25	2.97	3.68	4.60	5.30
(10)	2.49	3.39	4.24	6.43	(6.70)

3. 応用例: 風速観測値に基づく設計風速の決定

数十年にわたって集められるある地点の年最大風速(10分平均)は極値I型分布に比較的よく合っていることが知られている。昭和33年よりの16年間の年最大風速を東京、室戸岬について調べ、最尤法により $\hat{a}, \hat{b}$ を求めると表-2のようになる。⁸⁾ 表-1より $n=16$ について補間した k_E 、また統計的不確定性を全く無視した $n=\infty$ の k_E より求めた2つの

表2 観測値($n=16$)の最大パラメータ値

	東京	室戸岬
$\hat{a}$	18.19	38.27
$\hat{b}$	3.60	8.74

設計値 X_{16}^*, X_{∞}^* を図-2に示す。再現期間 T (年)は $T=1/P$ で与えられる。両者の値は T が大きくなるに従い、大きくなり差も開く。 $T=200$ 年のとき X_{∞}^* を設計値とすることは、統計的不確定性を考えた場合の83年、また $T=100$ 年のときは50年余りに相当する。現在通常使われている再現期間 T の値は、この統計的不確定性を考慮しないで求められたものであろうから、実際にはもっと小さな値であることに注意する必要があると思われる。

参考文献 1. 馬場中川, 成岡: 土木学会論文報告集, No. 254, 1976, 10月。2. 藤野: 文献1に対する討議(投稿中)。3. ISO Report: CCB, 1969。4. Paloheimo, Hannus: ASCE, ST 7, 1974, July。5. Aitchison, Sculthorpe: Biometrika, Vol. 52, No. 3, 4, 1965。6. Proshan: J. Amer. Stat. Assoc., Vol. 68, 1953。7. Antle, Rademaker: Biometrika, Vol. 59, 1972。8. 金井: 東京大学土木工学科卒業論文, 1974, 3月。

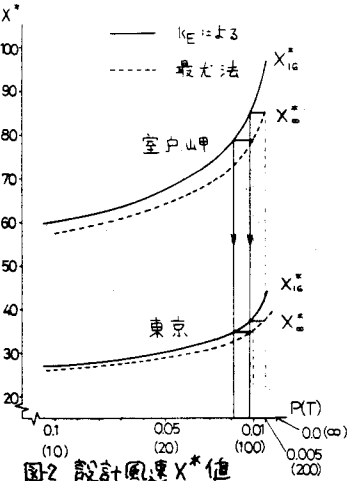


図2 設計風速 X^* 値