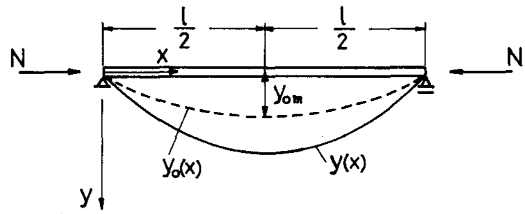
I-158　圧縮部材の確率論的設計法

鳥取大学工学部　正員　○白木　渡
鳥取大学工学部　正員　高岡宣善

1．まえがき　初期たわみを有する完全弾塑性圧縮部材の信頼性解析を確率過程論を用いて行なった。まず部材の強度を初期たわみ，降伏点強度および細長比の３つのパラメータの関数式で与え，つぎにそれら３つのパラメータが正規確率変数で，作用荷重が正規確率過程である場合の圧縮部材の破壊確率の算定式を誘導した。そしてその式を用いて数値計算を行ない，部材の初期たわみ，降伏点強度，細長比，耐用期間および荷重などが部材の破壊確率におよぼす影響を明らかにすることによって，圧縮部材の確率論的設計法の重要性を示した。

2．初期たわみを有する圧縮部材の座屈　図−1に示すような両端ヒンジの圧縮部材を考える[1]。部材は，長方形断面を有する等方性の完全弾塑性材料で作られ，軸方向力$N=0$のとき，初期たわみ$y_0(x)=y_{0m}\sin\frac{\pi x}{l}$を有しているものとする。問題を簡単化するために，部材のたわみの形状は塑性領域に入っても依然として正弦波であると仮定する。部材断面の平均応力は，$\sigma_c=N_c/A$で与えられる。ここに，Aは部材の断面積であり，N_cの値は荷重−たわみ曲線の最大値に対応するものである。σ_cの値は，次の２つの異なる式によって与えられる[2]：



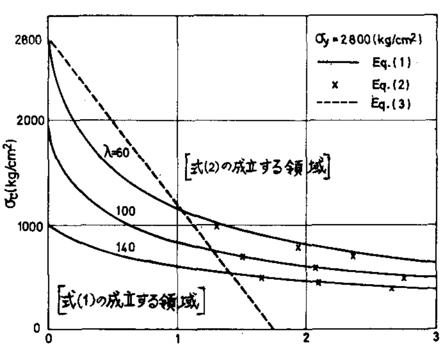
図−1

$$|\gamma|=\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_c}-1\right)\left(1-\sqrt[3]{\frac{\sigma_c}{\sigma_E}}\right)\quad ,(1)\qquad |\gamma|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_c}-\frac{\sigma_c}{\sigma_y}-\sigma_y\sqrt[3]{\frac{1}{\sigma_E^2\sigma_c}}\right).\ (2)$$

ここに，γは不完全係数とよばれる無次元量で$\gamma=y_{0m}/r$で定義される．rは断面の最小回転半径である。そして$|\gamma|$はγの絶対値を表わす。また，σ_yは降伏点強度，Eはヤング率，σ_Eはオイラーの座屈強度で，$\sigma_E=\pi^2E/\lambda^2$で表わされる。$\lambda$は細長比である．式(1)は断面の圧縮側のみが塑性状態に入る場合であり，式(2)は引張側の断面も塑性化する場合である。それらの式の有効領域は，直線

$$\sigma_c=\sigma_y\left(1-\frac{|\gamma|}{\sqrt{3}}\right)\qquad (3)$$

によって二分される。図−2は$\gamma\geq 0$の領域において，$\sigma_y=2800\ (kg/cm^2)$として式(1)，(2)および(3)の関係を描いてある。図において明らかなように，式(1)の有効領域内において式(1)と式(2)の違いは非常に小さい。またγは平均値0を有する確率変数である。したがって，確率の計算においてσ_c軸から離れるにしたがって誤差は重要性を失うことに注意して，以下の計算ではすべての領域に対して式(1)を用いる。



図−2

3．圧縮部材の破壊確率の算定式　作用する荷重$\sigma_f(t)$が定常確率過程で，この確率過程とその導関数$\dot{\sigma}_f(t)$との間には相関がなく，かつ部材の強度σ_cが確率変数である場合を考える。そして，$\sigma_f(t)$がσ_cを超過する回数がポアソン過程で近似できるとすると，耐用期間Tにおけるこの場合の部材の破壊確率$Q(T)$は次のようになる[3]：

$$Q(T)=1-\int_0^\infty f_{\sigma_c}(\sigma_c)\left\{\int_0^{\sigma_c}f_{\sigma_f}(\sigma_f)d\sigma_f\cdot\exp\left[-T\cdot f_{\sigma_f}(\sigma_c)\int_0^\infty\dot{\sigma}_f f_{\dot{\sigma}_f}(\dot{\sigma}_f)d\dot{\sigma}_f\right]\right\}d\sigma_c\qquad (4)$$

ここに，$f_{\sigma_c}(\sigma_c)$，$f_{\sigma_f}(\sigma_f)$および$f_{\dot{\sigma}_f}(\dot{\sigma}_f)$は，それぞれ強度$\sigma_c$，荷重$\sigma_f(t)$およびその導関数$\dot{\sigma}_f(t)$の確率密度関数である。さて，不完全係数$\gamma$，降伏点強度$\sigma_y$および細長比$\lambda$が互いに独立な正規確率変数で，荷重$\sigma_f(t)$およびその導関数$\dot{\sigma}_f(t)$がともに正規定常確率過程である場合を考える。式(1)の関係から部材の強度σ_cの確率密度$f_{\sigma_c}(\sigma_c)$を求め式(4)に代入すると，この場合の部材の破壊確率$Q(T)$は次のようになる：

$$Q(T)=1-\int_0^{\infty}\int_0^{\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_c}}}\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}D_\gamma\bar{\lambda}\bar{\sigma}_y V_\lambda V_{\sigma_y}}\cdot\exp\left[-\frac{(\lambda-\bar{\lambda})^2}{2\bar{\lambda}^2V_\lambda^2}-\frac{3H^2}{2D_\gamma}-\frac{1}{2V_{\sigma_y}^2}\right]\cdot\left[\frac{D_\gamma\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2\{3\pi^2E(1-H)^2-2\sigma_c\lambda^2\}}{\sqrt{3}\pi^2E(1-H)^2(3H^2\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2+D_\gamma\sigma_c^2)}\cdot\exp\left[\frac{3\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2H^2+D_\gamma(2\bar{\sigma}_y\sigma_c-\sigma_c^2)}{2D_\gamma\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2}\right]\right.$$

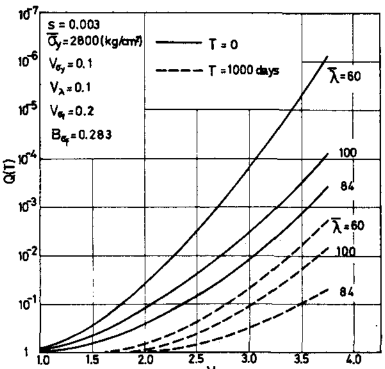
$$-\left[\frac{D_\gamma\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2\lambda^2\sigma_c(3H^2\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2+D_\gamma\sigma_c^2)-2\{3\pi^2E(1-H)^2-2\sigma_c\lambda^2\}(3\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2H^2+\bar{\sigma}_yD_\gamma\sigma_c)}{\sqrt{3}\pi^2E\sigma_c(1-H)^2(3\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2H^2+D_\gamma\sigma_c^2)}\right]\cdot\sqrt{\frac{2\pi D_\gamma\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2\sigma_c^2}{(3\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2H^2+D_\gamma\sigma_c^2)}}\cdot\exp\left[\frac{(3\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2H^2+D_\gamma\bar{\sigma}_y\sigma_c)}{2D_\gamma\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2(3\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2H^2+D_\gamma\sigma_c^2)}\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\left[1-\Phi\left\{\frac{D_\gamma\sigma_c^2(\sigma_c-\bar{\sigma}_y)}{(3\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2H^2+D_\gamma\sigma_c^2)}\sqrt{\frac{3H^2}{D_\gamma\sigma_c^2}+\frac{1}{\bar{\sigma}_y^2V_{\sigma_y}^2}}\right\}\right]\right]\cdot\left[\Phi\left(\frac{\nu\sigma_c-\sigma_{co}}{\sigma_{co}V_{\sigma_f}}\right)-\Phi\left(\frac{-1}{V_{\sigma_f}}\right)\right]\cdot\exp\left[-\frac{B_{\sigma_f}T}{2\pi V_{\sigma_f}}\cdot\exp\left\{\frac{-(\nu\sigma_c-\sigma_{co})^2}{2\sigma_{co}^2V_{\sigma_f}^2}\right\}\right]d\lambda\, d\sigma_c\,. \quad (5)$$

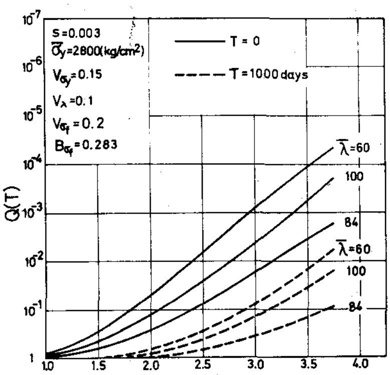
ここに，D_γ：γの分散，$\bar{\lambda}$：λの期待値，$\bar{\sigma}_y$：σ_yの期待値，$V_{\sigma_y}=\sqrt{D_{\sigma_y}}/\bar{\sigma}_y$：$\sigma_y$の変動係数，$V_\lambda=\sqrt{D_\lambda}/\bar{\lambda}$：$\lambda$の変動係数，$V_{\sigma_f}=\sqrt{D_{\sigma_f}}/\bar{\sigma}_f$：$\sigma_f$の変動係数，$D_{\dot{\sigma}_f}=-K''_{\sigma_f}(0)=\bar{\sigma}_f^2B_{\sigma_f}^2$：$\dot{\sigma}_f$の分散，$K_{\sigma_f}(\tau)$：$\sigma_f$の相関関数，$\nu=\sigma_{co}/\bar{\sigma}_f$：中央公称安全率，$\sigma_{co}=min(\bar{\sigma}_y,\bar{\sigma}_E)$：公称強度，$\bar{\sigma}_E=\pi^2E/\bar{\lambda}^2$：$\sigma_E$の期待値，$H=1-\sqrt[3]{\sigma_c\lambda^2/(\pi^2E)}$，$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}exp(-\frac{1}{2}u^2)du$．

4．数値計算例および考察

数値計算は，不完全係数γ，降伏点強度σ_yおよび細長比λが正規確率変数として与えられる完全弾塑性圧縮部材に，相関関数$K_{\sigma_f}(\tau)=D_{\sigma_f}exp(-\alpha\tau^2)$を有する正規定常確率過程である荷重$\sigma_f(t)$が作用する場合について行なった。その一例を図－3および図－4に示す。図－3および図－4は，それぞれ降伏点強度の変動係数V_{σ_y}が$V_{\sigma_y}=0.1$および$V_{\sigma_y}=0.15$の場合の破壊確率$Q(T)$と中央公称安全率νとの関係を細長比の期待値$\bar{\lambda}$をパラメータとして示したものである。いずれの場合も，ヤング率$E=2\times10^6\ kg/cm^2$，$\alpha=1/day^2$として計算を行なった。図においてSは，$S=\sqrt{D_\gamma}/\bar{\lambda}$で表わされるパラメータでBritish Standardsの規定を参考にして$S=0.003$とした。図から明らかなように，破壊確率$Q(T)$は部材の耐用期間Tの増加にともなって増大している。σ_yの変動係数V_{σ_y}を0.05増加させるだけで破壊確率$Q(T)$はかなり増大する。その傾向は，$\bar{\lambda}=60$のときに顕著である。また，部材の細長比の期待値$\bar{\lambda}$の増加にともなって$Q(T)$が大きくなるが，$\bar{\lambda}$が限界細長比$\lambda_{lim}=\pi\sqrt{E/\bar{\sigma}_y}\fallingdotseq 84$をこえると逆に$Q(T)$は小さくなってくる。このことから細長比$\lambda$が圧縮部材の強度$\sigma_c$のばらつきにかなりの影響をおよぼしていることが分かる。細長比が中程度，すなわち60～100程度の場合，設計規準によれば安全率を重くとって計算を行なうことが勧告されているが，これは確率論的立場からいえば細長比が限界細長比前後の値で部材強度σ_cのばらつきがもっとも大きくなり，危険であるということである。



図－3



図－4

1) G.A. Augusti et A. Baratta: Théorie Probabiliste de la Résistance des Barres Comprimées. Construction Métallique, No.2, pp.5-20, 1971.
2) Kurt H. Gerstle: Basic Structural Design. McGraw-Hill, New York, 1967.
3) 高岡宣善：構造物の設計・安全性・信頼性．土木学会誌第61巻第3号，pp. 33－41，1976年3月．