

日本電信電話公社 正 員 河村 満貴  
愛媛大学工学部 正 員 大久保 稔二

### 1 まえがき

地震動を受ける構造物の信頼性理論にもとづく最適設計問題において考慮すべき要因には、地震動の大きさの決定、地震荷重、材料強度、構造部材の製作施工誤差などの統計的諸性質(客観的不明量)、構造解析のモデル化により導入される誤差(主観的不明量)など、きわめて広範囲の内容を含んでいるが、ここでは、地震動を受ける橋脚の最適設計法に関する基礎的考察として、まず上述の客観的不明量のみに着目し、橋脚の破壊による社会的損失を最小とする見地から、橋脚の最適な断面諸元および破壊確率を決定する方法について研究を行なったものである。

### 2 最適設計問題の設定

本研究で対象とした橋脚は図-1)に示す鋼管杭基礎を有する高架橋橋脚であり、その解析モデルとして図-2)に示す3自由度系を仮定し、線形応答のみを考慮することとした。確率変数( $U$ )として、柱幅( $C$ )、杭径( $\phi$ )、コンクリート及び鋼の弾性係数、地盤の水平、鉛直方向 $K$ 値、コンクリートの設計基準強度を考慮し、橋脚が破壊した場合に生ずる社会的損失  $M$  (式(1))を最小とするように最適な柱幅( $C$ )および杭径( $\phi$ )の平均値を決定することとした。

$$M = C_1 + D \cdot P_f \quad (1)$$

上式の  $C_1$  は初期建設費、 $D$  は橋脚が機能を失うことにより社会に与える損失、 $P_f$  は橋脚の破壊確率であり、 $C_1$  および  $P_f$  は  $C$  および  $\phi$  の関数である。

### 3 破壊確率の算定

本研究では橋脚の破壊モードとして①橋脚頂部の水平変位が許容値を越えた場合、②フーチングの水平変位が許容値を越えた場合、③フーチングの回転変位が許容値を越えた場合、④鉄筋コンクリート柱の下端断面の曲げモーメントによる降伏の4つのモードを考慮している。各破壊モードは  $R$  を抗力あるいは許容値、 $S$  を作用力あるいは突たわみ量とすれば

$$Y = S - R > 0 \quad (2)$$

で表わされる。 $S$  の算定に必要な質点  $j$  の最大層せん断力  $V_j, \max$  および最大たわみ量  $y_j, \max$  はモデルアナリシスおよび2乗和平均値法により次式で算定した。

$$V_j, \max \approx \ddot{z}_{\max} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left\{ \sum_{i=1}^3 (m_i \cdot \delta_{ik} \cdot f_{rk} \cdot Y_i^{(k)}) \right\}^2} = \ddot{z}_{\max} \cdot Q_j, \max \quad (3)$$

$$y_j, \max \approx \ddot{z}_{\max} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left\{ Y_j^{(k)} \cdot f_{rk} \cdot \delta_{rk} / W_k^2 \right\}^2} = \ddot{z}_{\max} \cdot D_j, \max \quad (4)$$

ここに  $m_i$  は  $i$  点の質量、 $f_{rk}$  は  $k$  次振動モードの刺激係数、 $Y_j^{(k)}$  は  $k$  次振動モードにおける  $j$  点の相対変位、 $W_k$  は  $k$  次振動における橋脚の固有円振動数、 $\ddot{z}_{\max}$  は最大地震加速度である。また  $\delta_{rk}$  は増幅率と呼ばれるものであり、加速度応答スペクトルを  $S_R$  とすれば  $S_R = \delta_{rk} \cdot \ddot{z}_{\max}$  の関係を満たすものである。

(3)、(4)式における  $D_j, \max$  および  $Q_j, \max$  は確率変数の関数として表わされ、(2)で述べた確率変数( $U$ )の統計的性質を用いて、それぞれの統計的諸量を決定することができる。

さらに  $\ddot{z}_{\max}$  の平均値および分散は、Dahal がカリフォルニア州の地震データを分析して得た次の  $\ddot{z}_{\max}$  の確率分布関数および確率密度関数を用いて計算した。

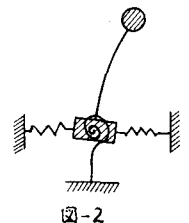
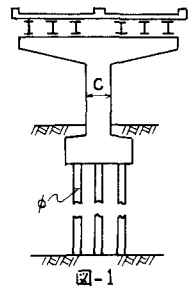
$$\left. \begin{aligned} 1 - F(\alpha) &= \exp \left[ -0.115 \cdot 10^{-3} \cdot Y \cdot \alpha^{-2.7} \right] \\ f(\alpha) &= 0.31 \cdot 10^{-3} \cdot Y \cdot \alpha^{-3.7} \exp \left[ -0.115 \cdot 10^{-3} \cdot Y \cdot \alpha^{-2.7} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに  $Y$  は年数であり 50 年を仮定した。

次に破壊モード  $i$  の生起確率  $P_{fi}$  は次式より計算した。

$$P_{fi} = P_r \{ Y_i > 0 \} \approx C_1 \cdot \exp(-C_2 \cdot \beta_i) \quad (6)$$

ここに、 $\beta_i = \mu_{Y_i} / 6\sigma_{Y_i}$ 、 $\mu_{Y_i}$  :  $Y_i$  の平均値、 $\sigma_{Y_i}$  :  $Y_i$  の標準偏差であり、



$C_1, C_2$ は $Y_i$ の分布形により決まる定数であるが、ここでは $C_1=1.0$ ,  $C_2=2.0$ と仮定した。さらに各破壊モードの相関を考慮した橋脚の破壊確率 $P_f$ は、Vanmarckeらの提案した次の近似式により算定した。

$$P_f = P_f \{ Y_1 > 0 \cup Y_2 > 0 \cup \dots \cup Y_n > 0 \} = \sum_{i=1}^n P_{f_i} \cdot \alpha_i$$

$$\alpha_i = P_f \{ Y_i < 0 \cap Y_2 < 0 \cap \dots \cap Y_{i-1} < 0 \mid Y_i > 0 \} \approx \min_{j=1}^{i-1} \left\{ 1 - \frac{P_f \{ M_i < -\max(\beta_j / |\rho_{ij}|, \beta_i) \}}{P_f \{ M_i < -\beta_i \}} \right\} \quad (7)$$

ここに、 $M_i = (Y_i - \mu_{Y_i}) / \sigma_{Y_i}$ ,  $\rho_{ij} = \text{Cov}(Y_i, Y_j) / (\sigma_{Y_i} \cdot \sigma_{Y_j})$ である。  
 (6),(7)式より明らかなように、橋脚の破壊確率 $P_f$ は $\beta_i$ および $\rho_{ij}$ 、すなわち、 $Y_i, Y_j$ の共分散 $\text{Cov}(Y_i, Y_j)$ および $\mu_{Y_i}$ を求めることにより算定することができる。

ところで $Y_i$ は確率変数 $(U)$ の関数であるから、 $U = U_0$  (任意定数)のまわりでTaylor展開し、 $U$ の1次の項までで近似すると次式で表わされる。)

$$Y_i(U) \approx Z_i(U_0) + X_i(U) \cdot I + \left( \frac{\partial Z_i}{\partial U} \right) \Big|_{U=U_0} + I \cdot \left( \frac{\partial X_i}{\partial U} \right) \Big|_{U=U_0} \cdot \Delta U = \sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^1 \bar{w}_{i,k,r} \cdot I^k \cdot \Delta U_r \quad (8)$$

ここに、 $Z_i = -R_i$ ,  $S_i = X_i \cdot I$ ,  $I = \sum \max$ ,  $\Delta U = U - U_0$ ,  $\Delta U_r = U_r - U_0^r$ ,  $\Delta U_0 = 1$ ,  $m: U$ の要素数  
 $r=0$ のとき  $\bar{w}_{i0,0} = Z_i(U_0)$ ,  $\bar{w}_{i1,0} = X_i(U_0)$

$$r > 0 \text{ のとき } \bar{w}_{i0,r} = \frac{\partial Z_i}{\partial U_r} \Big|_{U=U_0}, \bar{w}_{i1,r} = \frac{\partial X_i}{\partial U_r} \Big|_{U=U_0}$$

ここで $Z_i, X_i, \Delta U$ および $I$ は互いに統計的に独立であると仮定すると、 $Y_i$ の平均 $(\mu_{Y_i})$ は次式で表わされる。

$$\mu_{Y_i} = \sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^1 (\mu_{i,k,r}^{\bar{w}} \cdot \mu_{i,k}^I) \cdot \mu_r^{\Delta U} \quad (9)$$

さらにいづれの $\bar{w}_{i,k,0}$ もその導関数との間に線形な相関を仮定し、さらにすべての $\bar{w}_{i,k,0}$ に対して変動係数が $U_0$ のまわりで一定であると仮定すると、 $Y_i$ と $Y_j$ の共分散 $(C_{ij}^Y = \text{Cov}(Y_i, Y_j))$ は次式より計算される。

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \sum_{k=0}^1 \sum_{r=0}^1 \mu_{i,k,r}^{\bar{w}} (\mu_{i,k}^I)^T \epsilon^{\Delta U} (\mu_{j,l}^{\bar{w}}) (S_{ij,kl}^{\bar{w}} \cdot V_{i,k}^{\bar{w}} \cdot V_{j,l}^{\bar{w}} + 1) + (\mu^{\Delta U})^T \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \{ \mu_{i,k,r}^{\bar{w}} \cdot \mu_{j,l,s}^{\bar{w}} [ (S_{ij,kl}^{\bar{w}} \cdot V_{i,k}^{\bar{w}} \cdot V_{j,l}^{\bar{w}} + 1) \mu_{i,k,l}^I - \mu_k^I \cdot \mu_l^I ] (\mu^{\Delta U}) \}$$

$$\quad (10)$$

ここに $\mu^{\Delta U}$ は $\Delta U$ の平均値のベクトル、 $\mu_{i,k}^{\bar{w}} = [\mu_{i,k,0}^{\bar{w}} \dots \mu_{i,k,m}^{\bar{w}}]^T$ ,  $\epsilon^{\Delta U} = \begin{bmatrix} C_{00}^{\Delta U} & 0 \\ 0 & C_{mm}^{\Delta U} \end{bmatrix}$ ,  $\mu_{j,l}^{\bar{w}} = [\mu_{j,l,0}^{\bar{w}} \dots \mu_{j,l,m}^{\bar{w}}]^T$   
 $V_{i,k}^{\bar{w}}$ は $\bar{w}_{i,k,0}$ の変動係数、 $S_{ij,kl}^{\bar{w}}$ は $\bar{w}_{i,k,0}$ と $\bar{w}_{j,l,0}$ の間の相関係数である。

(9),(10)式を用いることにより、各破壊モードの平均値、分散および各破壊モード間の共分散は設計変数 $C$ および $\phi$ の変化量 $\Delta C$ および $\Delta \phi$ の関数として表わされ、従って構造物の破壊確率 $P_f$ も $\Delta C$ および $\Delta \phi$ の関数として表現することができる。

**4 最適解の決定** 前節の展開により(1)式の目的関数 $M$ も $\Delta C$ および $\Delta \phi$ の関数として表わされ、制約条件のない非線形最適化問題としてPowellの方法により $\Delta C, \Delta \phi$ を改良し、社会的損失 $M$ を最小とする最適な $C$ および $\phi$ を決定した。

**5 計算例** 目的関数の $D$ として $10^8, 10^9, 10^{10}$ (円)を仮定し、初期値として $C=250\text{cm}$ ,  $\phi=80\text{cm}$ とした場合(A)および $C=500\text{cm}$ ,  $\phi=120\text{cm}$ とした場合(B)の最適解を表-1に示す。いづれの $D$ においてもA,B共に同一の最適解を得ており、また $D$ の増加にしたがい $P_f$ を減少させるように $C$ および $\phi$ が増加し、妥当な結果が得られている。

| 表 - 1                     | D = 10 <sup>8</sup> (円) |                         | D = 10 <sup>9</sup> (円) |                         | D = 10 <sup>10</sup> (円) |                         |
|---------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
|                           | A                       | B                       | A                       | B                       | A                        | B                       |
| 初期値                       |                         |                         |                         |                         |                          |                         |
| 柱幅(C) <sub>opt</sub> , cm | 297.07                  | 300.34                  | 433.19                  | 436.95                  | 698.91                   | 703.26                  |
| 杭径(φ) <sub>opt</sub> , cm | 115.70                  | 116.03                  | 154.00                  | 154.40                  | 221.23                   | 221.84                  |
| P <sub>f opt</sub>        | 0.217×10 <sup>-1</sup>  | 0.213×10 <sup>-1</sup>  | 0.705×10 <sup>-2</sup>  | 0.105×10 <sup>-2</sup>  | 0.280×10 <sup>-3</sup>   | 0.282×10 <sup>-3</sup>  |
| TCOST <sub>min</sub> (円)  | 0.17504×10 <sup>8</sup> | 0.17516×10 <sup>8</sup> | 0.20710×10 <sup>8</sup> | 0.20786×10 <sup>8</sup> | 0.31770×10 <sup>8</sup>  | 0.31921×10 <sup>8</sup> |
| ITERATION                 | 3                       | 12                      | 10                      | 10                      | 17                       | 15                      |
| CPU (sec.)                | 3.4                     | 8.3                     | 5.3                     | 5.5                     | 10.3                     | 9.8                     |

Aの場合 C = 250 cm, φ = 80 cm, Bの場合 C = 500 cm, φ = 120 cm, (by FACOM230-75)

1) Vitellio E., Pister K.S. "Applications of Reliability-Based Global Cost Optimization to Design of Earthquake-Resistant Structures" Aug. 1974. U. of Cal.