I-154　組合せ応力を受ける骨組構造物の最適塑性設計

防衛大学校土木工学教室　正員　石川信隆

1. 緒言　本研究は，各種の組合せ応力を受ける骨組構造物を対象とした最適塑性設計法を提示するもので，まず一般に無次元化応力で表示される降伏条件式を，設計用に次元を有する近似的な降伏凸多面体に変換した。ついで有限要素に基づくマトリックス解析手法を準用して平衡条件式および崩壊機構条件式を導き，さらにLPにおける双対定理を用いて塑性設計の上界および下界定理に基づく基本式を誘導し，もって立体骨組構造物の最適塑性設計を可能ならしめたものである。設計に当っては剛塑性理論にしたがう他に，次の仮定を設ける。(i)各要素の塑性容量の比（例えば M_{py}/M_{px}, T_{pz}/M_{px}, N_{pz}/M_{px} など）は断面について一定とし，各要素当りの設計変数は1つ（M_{px}＝x軸まわりの全塑性曲げモーメント）とする。(ii)各要素の単位長さ当りの重量は M_{px} の線形関数で表わされるものとする。

2. 設計のための基本的条件

(1) 降伏条件　組合せ応力を考慮した降伏条件式は，一般に非線形な無次元化応力の関数として表わされるが，これを近似的な降伏凸多面体に置換[1]したうえで，各要素の塑性容量の比を一定とすれば，構造全体に対する有次元の降伏条件式が次のようにえられる。　ただし，$N^T = n^T Y$；n^T＝無次元化降伏凸多面体の単位外向き法線マトリックス；Y＝塑性容量の比を示す係数マトリックス；

$$N^T Q - KTr \leqq 0 \quad \cdots (1)$$

K＝無次元化降伏凸多面体の原点（応力＝0）から降伏面までの距離ベクトル；Q＝作用断面力ベクトル；r＝設計変数ベクトル；T＝等価変換マトリックス。

また作用断面力 Q が降伏面上にあるときは，Q に対応する作用変形速度 $\dot{q}$ がその降伏面上の外向き法線に比例することから，　$\dot{q} = N\dot{\lambda} \quad \cdots (2)$　ただし，$\dot{\lambda}$＝塑性乗数ベクトル。

(2) 崩壊機構条件（変形適合条件）と平衡条件

変形適合条件は，作用変形速度 $\dot{q}$ が幾何学的に構造物の独立な節点変形速度 $\dot{u}$ と結合するという条件で，次式が成立する。　$\dot{q} = C\dot{u} \quad \cdots (3)$　ただし，C＝構造全体の変形適合マトリックス。

よって，式(2),(3)から，崩壊機構条件式が次のようになる。　$N\dot{\lambda} - C\dot{u} = 0 \quad \cdots (4)$

また力と変形の相関関係を示す反傾定理[2]を式(3)に適用すれば構造全体の平衡条件式が次のように求められる。

$$C^T Q = \alpha_L F_L + \alpha_D F_D \quad \cdots (5)$$

ただし，α_L, α_D＝活荷重および死荷重係数；F_L, F_D＝作用活荷重および死荷重。

3. 設計の基本式

(1) 上界定理による基本式　塑性設計の上界定理によれば「平衡条件と降伏条件を満足する（静的許容な応力状態の）設計（G^+）は，最小重量設計（G）の上界を与える（$G \leqq G^+$ or $G = \min. G^+$）。」[3] ことになるから，目的関数として構造物の全重量を採用すれば，式(1),(5)を用いて次のような上界定理による基本式がえられる。

未知の変数：	r, Q	
目的関数：	$G = \min. G^+ = \min. L^T r$	(6a)
制約条件：	$N^T Q - KTr \leqq 0$	(6b)
	$C^T Q = \alpha_L F_L + \alpha_D F_D$	(6c)
	$r \geqq 0$	(6d)

ここに，式(6a)は構造物の全重量が最小となることを示し，式(6b),(6c)は降伏条件と平衡条件式を表わしている。また L＝設計変数 r に対応する要素の部材長ベクトル；G^+＝静的許容な応力場における構造物の全重量。

(2) 下界定理による基本式　式(6)にLPにおける双対定理[4]を適用すれば，下界定理に基づく設計の基本式が次のように導かれる。

未知の変数：	$\dot{\lambda}, \dot{u}$
目的関数：	$G = \max. G^- = \max. (\alpha_L F_L + \alpha_D F_D)\dot{u} \cdots (7a)$
制約条件：	$N\dot{\lambda} - C\dot{u} = 0 \cdots (7b)$，　$T^T K^T \dot{\lambda} \leqq 3L \cdots (7c)$，　$\dot{\lambda} \geqq 0 \cdots (7d)$

こゝに，式(7a)は終局設計荷重時における外力のなす仕事が最大となることを示し，式(7b)は式(5)と同じ崩壊機構条件式を，また式(7c)は重量適合機構（Foulkes機構）が形成される条件を示している。ただし，β＝比例定数；　G^-＝運動学的許容な変形場における外力仕事。

すなわち，式(7)は塑性設計の「骨組構造物において重量適合機構がえられるとき(G^-)，その設計は最小重量設計(G)に等しいかそれより軽い」[3]という下界定理を満足していることになる（$G^- \leq G$ or $G = \max. G^+$）。　こゝで式(6)の表（Primal）の変数は$\mathbf{Q}$，$\mathbf{r}$であるが，式(6)の裏（Dual）の変数を求めれば，式(7)の表の変数$\dot{\lambda}$，$\dot{u}$がえられ，その反対も成立する。よって，式(6)または式(7)のどちらかを解けば全ての変数が同時に求められることになる。しかし，スラック変数などを考慮するとマトリックスの大きさは式(7)の方が小さくなり，またLPの効率性からも式(7)を用いた方がよい。

4. 計算例

いま図-1に示すような二軸曲げと捩りを考慮した断面の近似降伏凸八面体を用いて，図-2に示す立体ラーメンの最適塑性設計を行なう。たゞし，部材断面は正方形（$M_{py}/M_{px}=1$，$T_{pz}/M_{px}=0.77$）とし，$\lambda_L=1$，$\lambda_D=0$とする。部材要素の数$m=11$，作用断面力$\mathbf{Q}$の数55（要素当り5×要素数11），塑性乗数$\dot{\lambda}$の数176（要素当りの降伏面の数16×要素数11），節点変形速度$\dot{u}$の数31（図-3参照）であり，設計変数$\mathbf{r}$の数を3個（図-2参照）とすれば，式(7)で変数の数210（$\dot{\lambda}$の数176＋$\dot{u}$の数＋スラック変数3）および制約条件式の数58（$\mathbf{Q}$の数55＋$\mathbf{r}$の数3）となる。よって，式(7)を解けば図-4に示すような重量適合機構および表-1のような結果がえられる。

5. 結語

本法は，曲げと軸力を受ける平面ラーメンやアーチ構造，曲げと捩りを受ける格子桁，また4.で示した二軸曲げと捩りを受ける立体ラーメンなどに適用でき，極めて汎用性に富む手法といえる。また1回のLPの適用で全ての解が短時間にえられるなど計算も効率的である。さらに，二軸曲げと捩りと軸力など多くの組合せ応力を受ける場合に対しては，降伏凸多面体の頂点を求めたうえで，LPの分割原理[4]を適用することにより解決でき，マトリックスサイズを減少させることも可能である。なお，本法は有限要素に基づく手法であるゆえ，板あるいはシェルなどの連続体にも応用拡張が可能ではないかと思われる。

参考文献　1) Grierson, D.E. and Baset, S.B., "Plastic Analysis under Combined Stresses" SM paper No.139, Univ. of Waterloo, Aug. 1976.
2) Livesley, R.K., "Matrix Method of Structural Analysis", Pergamon Press, 1964.
3) 長尚，"構造物の最適設計"，朝倉書店，昭46年。
4) Gass, S.I., "Linear Programming", McGraw Hill, 1959.

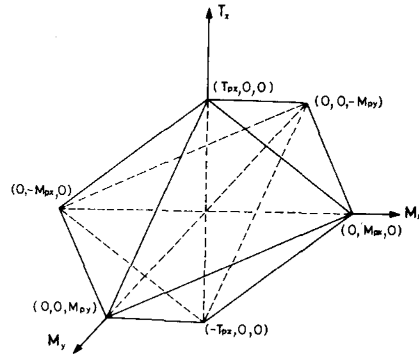

図-1　$M_x+M_y+T_z$の降伏条件

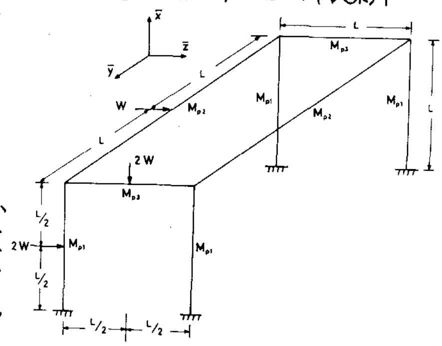

図-2　構造および載荷形式

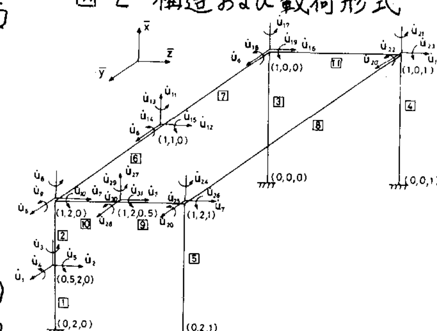

図-3　節点変形速度$\dot{u}$

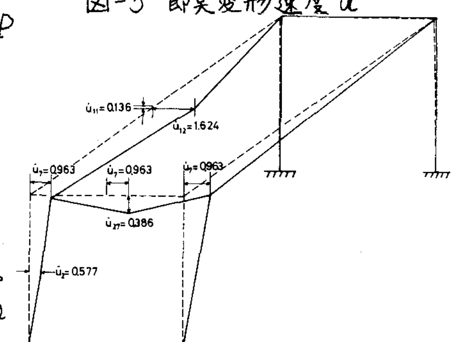

図-4　重量適合機構

表-1　最適解

	Design Variable M_{px} (XWL)			Weight
	M_{p1}	M_{p2}	M_{p3}	G (XWL^2)
$M_x+M_y+T_z$	0.386	0.284	0.436	3.550