I-153 最適制御の理論の応用による構造系の最適設計

東京電機大学 正員 ○松井邦人
アイオワ大学 E.J. Haug

1. まえがき

Optimum Control の分野の理論の進歩には目ざましいものがある。しかしそこで開発された手法は構造物の最適設計等の分野に十分活用されていないように思われる。Control の問題は初期値問題であるが、構造系では一般に境界値問題となる。ここでは Bryson[1] と Miele[2] 等によって開発されたアルゴリズムを拡張し、境界値問題をも扱えるものとした。設計変数は普通ベクトルとなるが、ここではベクトル関数である。即ち変数は空間の関数である。従って、例えば梁の断面を求める時、断面は階段状ではなく、連続的に変化させることも可能である。ここに提示する手法は Nonlinear programing の一種で変分法と最大傾斜法を組合わせている。

2. Optimization 問題

Optimization の変数は2種類に分類出来る。即ち設計変数 $u(x)$ と状態変数 $z(x)$ である。先に述べたように $u(x)$, $z(x)$ は共にベクトル関数である。構造系は弾性体で微小変位理論が成り立つとすると、状態方程式は

$$K(u)\, z = Q \quad ; \quad x \text{ in } \Omega \tag{1}$$

となる。但し Ω は x の領域である。Operator K は設計変数 u の関数で、一般には x がスカラー変数かベクトル変数かによって、微分作用素或いは偏微分作用素となる。又式(1)の境界条件は

$$B z = 0 \quad ; \quad x \text{ on } \Gamma \tag{2}$$

とする。ここに Γ は Ω の境界を意味する。固有値が拘束条件に含まれる場合には、固有値問題

$$K(u)\, y = \zeta M(u)\, y \tag{3}$$

$$B y = 0 , \tag{4}$$

を解かねばならない。これを解く際、固有ベクトル y を M に関して正規化しておくと便利である。即ち

$$\int_\Omega y^T M y \, d\Omega = 1 . \tag{5}$$

拘束条件として考えられるものには、部材のサイズ、応力、固有振動数、座屈荷重、たわみ等であり、これ等は

$$\Phi_i(u) \le 0 , \qquad i = 1, 2, \cdots, k \tag{6}$$

或いは、

$$\psi_j(u, z, \zeta) = h_j(\zeta) + \int_\Omega g(u, z)\, d\Omega \le 0 , \quad j = 1, 2, \cdots, l \tag{7}$$

で書き表わせる。$\eta(u, z) \le 0$ のような拘束条件は非常に扱い難いものとされているが

$$\psi_j = \int_\Omega (\eta + |\eta|)\, d\Omega = 0 \tag{8}$$

と置くことにより、式(7)と同様になる。最後に目的関数は

$$J = f_0(\zeta) + \int_\Omega f_1(z, u)\, d\Omega \tag{9}$$

とする。従って Optimization 問題は式(1)～(7)を満足し、かつ J を最小にするように u を求めることである。

3. 一般化された最大傾斜法

ここに用いる手法は、一般化された最大傾斜法と言われ、ref.(1),(2) に詳しく説明されている。これを用いるには、前節のすべての式の一次近似が必要である。式(9),(7),(8) の変化量は

$$\delta J = f_{0,\zeta}\, \delta\zeta + \int_\Omega \{ f_{1,z}\, \delta z + f_{1,u}\, \delta u \}\, d\Omega \tag{10}$$

$$\delta\Phi_i = \Phi_{i,u}\, \delta u \quad ; \quad i = 1, 2, \cdots, k \tag{11}$$

$$\delta\psi_j = h_{j,s}\,\delta s + \int_\Omega \{ g_{j,z}\,\delta z + g_{j,u}\,\delta u \}\, d\Omega \qquad j=1,2,\cdots,\ell \tag{12}$$

となる。 変化量 δu と δz は式(1)より次のような関係がある。

$$K(u)\,\delta z + [K(u)z]_{,u}\,\delta u = 0 \tag{13}$$

$$B\,\delta z = 0. \tag{14}$$

式(10)〜(12)から δz, δs を消去することは計算上有利となる。 δz を消去するために $K(u)$ の adjoint operator を用い、又 δs を消去するためには式(3),(4) の adjoint 型を用いる。 一般に構造系では式(1),(2)も式(3),(4)も self-adoint である故、δz, δs を消去する操作は非常に簡単になる。 δz, δs の消去後、式(10)〜(12)

$$\delta J = \int_\Omega \Lambda^{J^T}\,\delta u\, d\Omega \tag{15}$$

$$\tilde{\Phi}_{,u}\,\delta u \leq \Delta\tilde{\Phi} \tag{16}$$

$$\int_\Omega \Lambda^{\tilde{\Psi}^T}\,\delta u\, d\Omega \leq \Delta\tilde{\Psi} \tag{17}$$

で示される。 $\tilde{\Phi}$, $\Lambda^{\tilde{\Psi}}$ に〜の記が付いているのは式(6),(7)の拘束条件のうちで、条件を満足しないものである。また、$\Delta\tilde{\Phi}$, $\Delta\tilde{\Psi}$ はそれ等の式で修正されるべき量、即ち $\Delta\tilde{\Phi} = -\tilde{\Phi}$, $\Delta\tilde{\Psi} = -\tilde{\Psi}$ である。 一次近似の式が成立するためには、δu は十分に小さくなければならない。従って

$$\int_\Omega \delta u^T W\,\delta u \leq \xi^2 \quad ; \quad \xi \ll 1. \tag{18}$$

なる条件が必要である。 ただし W は重み関数であり、設計変数の order が全く異なる時、order を揃えるように W を選ぶと収束を早めることが出来る。 変化量 δu は式(16),(17),(18)を満たし δJ を最小にするように決定する。変分法を導入すると、乗数 $\mu(x) \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\beta \geq 0$ で

$$\Lambda^J + \tilde{\Phi}_{,u}\,\mu + \Lambda^{\tilde{\Psi}}\gamma + 2\beta W\,\delta u = 0. \tag{19}$$

$$\mu_i(\tilde{\Phi}_{i,u}\,\delta u - \Delta\tilde{\Phi}_i) = 0. \tag{20}$$

$$\gamma_j\left(\int_\Omega \Lambda^{\tilde{\Psi}_j^T}\,\delta u\, d\Omega - \Delta\tilde{\Psi}_j\right) = 0. \tag{21}$$

$$\left(\int_\Omega \delta u^T W\,\delta u\, d\Omega - \xi^2\right) = 0. \tag{22}$$

を得る。 上式を γ, $\mu(x)$, δu について解くと

$$\gamma = M_{\psi\psi}^{-1}\left[-M_{\psi J} + 2\beta\left(M_{\psi\phi} - \Delta\tilde{\Psi}\right)\right] \tag{23}$$

$$\mu = -\Lambda^{\tilde{\Phi}^{-1}}\left\{\tilde{\Phi}_{,u} W^{-1}(\Lambda^J + \Lambda^{\tilde{\Psi}}\gamma) + 2\beta\,\Delta\tilde{\Phi}\right\} \tag{24}$$

$$\delta u = -\frac{1}{2\beta}\,\delta u^1 + \delta u^2 \tag{25}$$

但し、

$$M_{\psi J} = \int_\Omega \Lambda^{\tilde{\Psi}^T} W^{-1}(I - \tilde{\Phi}_{,u}\Lambda^{\tilde{\Phi}^{-1}}\tilde{\Phi}_{,u}^T W^{-1})\Lambda^J\, d\Omega \tag{26}$$

$$M_{\psi\psi} = \int_\Omega \Lambda^{\tilde{\Psi}^T} W^{-1}(I - \tilde{\Phi}_{,u}\Lambda^{\tilde{\Phi}^{-1}}\tilde{\Phi}_{,u}^T W^{-1})\Lambda^{\tilde{\Psi}}\, d\Omega \tag{27}$$

$$M_{\psi\phi} = \int_\Omega \Lambda^{\tilde{\Psi}^T} W^{-1}\tilde{\Phi}_{,u}\Lambda^{\tilde{\Phi}^{-1}}\Delta\tilde{\Phi}\, d\Omega \tag{28}$$

$$\delta u^1 = W^{-1}[I - \tilde{\Phi}_{,u}\Lambda^{\tilde{\Phi}^{-1}}\Phi_{,u}^T W^{-1}](\Lambda^J - \Lambda^{\tilde{\Psi}} M_{\psi\psi}^{-1} M_{\psi J}) \tag{29}$$

$$\delta u^2 = W^{-1}[I - \tilde{\Phi}_{,u}\Lambda^{\tilde{\Phi}^{-1}}\Phi_{,u}^T W^{-1}]\Lambda^{\tilde{\Psi}} M_{\psi\psi}^{-1}(M_{\psi\phi} - \Delta\Psi) + W^{-1}\Phi_{,u}^T\Lambda^{\tilde{\Phi}^{-1}}\Delta\tilde{\Phi} \tag{30}$$

となる。 式(25)の β は未決であるが、式(18)を等号に置き換え決定出来る。 計算例としては単純支持梁及び四辺単純支持板を種々の拘束条件(最小断面或いは最小厚さ、最大たわみ、許容応力、固有振動数)のもとに解いた。結果は当日発表する。

4、むすび

第2節に提示した Optimization 問題の状態方程式を一般的な関数に置き換えることが出来る。従って構造系の最適設計だけではく、一種の数値計算法として巾広い分野に応用出来る。

Reference ;

(1) Bryson, A.E. and Ho, Y-C, "Applied Optimal Control", Blaisdell Pub. Co. 1969.

(2) Miele, A. and his coworkers "Sequential Gradient Restoration Algorithm for Optimal Control Problems" J. Opt. Th. Appl., Vol. 5, No. 4 pp 235-282, 1970.