

# I-132 ステップ関数を用いた連続吊橋の剛性マトリックス解法

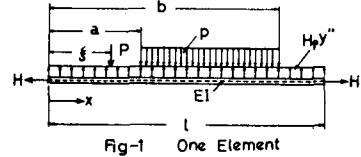
北海道大学工学部 正員 ○ 佐藤浩一  
 北海道大学工学部 正員 渡辺昇  
 本四連絡橋公団 正員 大島久

1. まえがき 先に発表した報文<sup>1)</sup>は分布荷重を多数の集中荷重に置換し、吊橋の線形化挠度理論の解析を剛性マトリックス法で行なったものであり、置換するところに厳密性に欠ける感があり、精度を上げるために分割数を増す必要性があつた。本報告は要素の中間に集中荷重および部分分布荷重が作用する場合の吊橋の線形化挠度理論の剛性マトリックスをラプラス変換を用いて説明したものであり、分割数を極端に少なくすることが出来る。数値計算としては、本解析法で分割数を少なくてしまして厳密に求め解析する方法(解法1)、従来からの応力法(解法2)、本解析法で分割数を多くして  $H_p$  をシンプソン公式を用いて求め解析する方法(解法3)、報文による方法(解法4)の4通りを比較検討し、挠度理論との比較を行なつた。

## 2. 吊橋の剛性マトリックスのラプラス変換による説明(曲げ解析)

膜理論による場合の吊橋の微分方程式は次の2本の式である。

$$EI\ddot{v}(x) - H\ddot{v}''(x) = p(x) + H_p y'' \quad (1), \quad H_p \frac{\ell^2}{EI A_0} + y'' \int_0^x v(x) dx = 0 \quad (2)$$



式(1)は図-1のような荷重状態の桁と答えることが出来るから、次式のようになる。

$EI\ddot{v}(x) - H\ddot{v}''(x) = P\delta(x-\xi) + p\{E(x-a) - E(x-b)\} + H_p y'' \quad (1)',$  この式(1)'をラプラス変換して、逆変換を行ない、境界条件  $x=0$  で、 $v(0)$ ,  $v'(0)$ ,  $Q(0)$ ,  $M(0)$  を与え、 $y''(0) = -\frac{M(0)}{EI}$ ,  $y''(l) = -\frac{Q(l)}{EI} + \mu^2 v'(0) \quad (3)$  を用いて、荷重、横寸角、剪断力、曲げモーメントを求めれば、次のようになる。ここのでは、微分方程式の符号を剛性マトリックスの符号に置換してある(図-2)。

$$\begin{cases} P(x) \\ v(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\mu} \sinh \mu x & \frac{1}{H} (\sinh \mu x - \mu x) & \frac{1}{H} (1 - \cosh \mu x) \\ 0 & \cosh \mu x & \frac{1}{H} (\cosh \mu x - 1) & -\frac{1}{H} \sinh \mu x \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{H}{H\mu} \sinh \mu x & \frac{1}{H\mu} \sinh \mu x & -\cosh \mu x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ Q(0) \\ M(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA_1(x, \xi) \\ PB_1(x, \xi) \\ PC_1(x, \xi) \\ PD_1(x, \xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi(A_2(x, a) - A_2(x, b)) \\ \phi(B_2(x, a) - B_2(x, b)) \\ \phi(C_2(x, a) - C_2(x, b)) \\ \phi(D_2(x, a) - D_2(x, b)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_p y''(A_2(x, 0) - A_2(x, l)) \\ H_p y''(B_2(x, 0) - B_2(x, l)) \\ H_p y''(C_2(x, 0) - C_2(x, l)) \\ H_p y''(D_2(x, 0) - D_2(x, l)) \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $A_1(x, \xi) = \frac{1}{H\mu} \{\sinh \mu(x-\xi) - \mu(x-\xi)\} E(x-\xi)$ ,  $B_1(x, \xi) = \frac{1}{H} \{\cosh \mu(x-\xi) - 1\} E(x-\xi)$ ,  $C_1(x, \xi) = -1$ ,  $D_1(x, \xi) = \frac{1}{H} \cdot \sinh \mu(x-\xi) E(x-\xi)$ ,  $A_2(x, a) = \frac{1}{H\mu} \{\cosh \mu(x-a) - 1 - \frac{1}{2} \mu^2(x-a)^2\} E(x-a)$ ,  $C_2(x, a) = -(x-a) E(x-a)$ ,  $B_2(x, a) = \frac{1}{H\mu} \{\sinh \mu(x-a) - \mu(x-a)\} E(x-a)$ ,  $D_2(x, a) = \frac{1}{H\mu} \{\cosh \mu(x-a) - 1\} E(x-a)$  である。以上を式(4)とする。

従って、 $v(x) = v_p(x) + v_{H_p y''}(x) \quad (5)$ , 式(5)で  $v(x)$  は正確に求まる。式(5)を式(2)に代入し、 $v(x)$  の面積を求めれば、 $H_p = -y'' \sum_{i=1}^n \{[G]_i^T \{U\}_i + Z(P, \xi, p, a, b)_i\} / \left( \frac{L^2}{EI A_0} + y'' \sum_{i=1}^n \{[G]_i^T \{U_{H_p y''}\}_i + Z(0, 0, 1, 0, l)_i\} \right) \quad (6)$  で  $H_p$  は求まる。ここの  $[G]^T = [l, \frac{1}{\mu}(\cosh \mu l - 1), \frac{1}{H\mu^2}(\cosh \mu l - 1 - \frac{1}{2} \mu^2 l^2), -\frac{1}{H\mu}(\sinh \mu l - \mu l)]$ ,

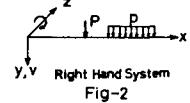
$$[U_p]^T = [v_p(0), v'_p(0), Q_p(0), M_p(0)], [U_{H_p y''}]^T = [v_{H_p y''}(0), v'_{H_p y''}(0), Q_{H_p y''}(0), M_{H_p y''}(0)], Z(P, \xi, p, a, b) = \frac{P}{H} \frac{1}{\mu} \{ \cosh \mu(l-\xi) - 1 - \frac{1}{2} \mu^2(l-\xi)^2 \} + \frac{P}{H} \frac{1}{\mu} \{ \sinh \mu(l-a) - \mu(l-a) - \frac{1}{2} \mu^2(l-a)^2 \} - \{ \sinh \mu(l-b) - \mu(l-b) - \frac{1}{2} \mu^2(l-b)^2 \},$$

式(4)で  $x=l$  における分割マトリックスを用いて変形すれば剛性マトリックス(右手座標系)が求まる。

$$\begin{cases} Q(0) \\ M(0) \\ Q(l) \\ M(l) \end{cases} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(l) \\ v'(l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PA(l-\xi) \\ PB(l-\xi) \\ PA(\xi) \\ PB(\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PA(l-a, l-b) \\ PB(l-a, l-b) \\ PA(a, b) \\ PB(a, b) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_p y'' f(l, 0) \\ H_p y'' g(l, 0) \\ H_p y'' f(0, l) \\ H_p y'' g(0, l) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$k_{11} = k_{33} = -k_{13} = -k_{31} = \frac{1}{H\mu} \sinh \mu l$ ,  $k_{12} = k_{24} = -\frac{1}{H\mu} (\sinh \mu l - \mu l \cosh \mu l)$ , はステップ関数である

$k_{12} = k_{21} = k_{14} = k_{41} = -k_{23} = -k_{32} = -k_{34} = -k_{43} = \frac{1}{H} (\cosh \mu l - 1)$ ,  $k_{24} = k_{42} = \frac{1}{H\mu} (\sinh \mu l - \mu l)$ ,



$$A(\xi) = \frac{2}{H^2} \left\{ \sinh(a\xi) (\cosh(a\xi) - 1) - (\cosh(a\xi) - 1) (\cosh(a\xi) - 1) \right\}, B(\xi) = \frac{2}{H^2} \frac{1}{\mu} \left\{ (\sinh(a\xi) - 1) (\cosh(a\xi) - 1) - (\cosh(a\xi) - 1) (\sinh(a\xi) - 1) \right\},$$

$$f(a, b) = \frac{2}{H^2 \mu} \left[ \sinh(a\xi) \left\{ (\cosh(a\xi) - 1 - \frac{1}{2} a^2) - (\cosh(a\xi) - 1 - \frac{1}{2} a^2 b^2) \right\} - (\cosh(a\xi) - 1) \left\{ (\sinh(a\xi) - 1a) - (\sinh(a\xi) - 1b) \right\} \right],$$

$$g(a, b) = \frac{2}{H^2 \mu} \left[ (\sinh(a\xi) - 1a) \left\{ (\cosh(a\xi) - 1a) - (\cosh(a\xi) - 1b) \right\} - (\cosh(a\xi) - 1) \left\{ (\cosh(a\xi) - 1 - \frac{1}{2} a^2) - (\cosh(a\xi) - 1 - \frac{1}{2} a^2 b^2) \right\} \right]$$

式(7)を用ひ、2、吊橋構造全体の剛性マトリックスを作り、支点処理し、 $\{U_p\}$ と $\{U_{Ap}\}$ を求めればよい。

従つて、 $H_p$ が求まり、式(4)に代入すればよい。以上は $H = H_g + H_p$ の $H$ を一定とした線形化荷度理論であるが、荷度理論の場合、式(6)で活荷重によるケーブルの付加水平張力 $H_{p1}, H_{p2}, H_{p3}$ の3種類を求め、Lagrangeの補間公式 $H_p = (H_{p1} \cdot H_{p3} - H_{p2}^2) / (H_{p1} + H_{p3} - 2H_{p2}) \dots \dots (8)$ を用ひ、収束条件は $| (H_p - H_{pi}) / H_p | \leq 10^{-4}$ とした。

### 3. 数値計算例

例としては図-3のような三径間連続吊橋とした。

断面諸元は $f_1 = 3.125m$ ,  
 $f_2 = 50m$ ,  $R_1 = R_2 = 625m$ ,  
 $L_c = 851.25m$ ,  $H_g = 9375ton$ .

解法1(本解析法, 3分割)  
 解法2(応力法)  
 解法3(本解析法, 1/20分割)  
 解法4(置換法, 1/20分割)

を比較すれば、図-5, 7より  
 解法1, 2, 3は撓み, B.M.とともに有効数字7桁まで一致しており、  
 解法4は撓みと曲げモーメントとも一致している(図-8)

は破線、実線とともに半通り重なること)。線形化荷度理論(L.D.T.)と荷度理論(D.T.)とでは撓みで約4%, B.M.で約7%の差がある(破線と実線)。図-6, 8はD.T.で載荷長(図-4)を変化させた時の比較であり、図-9, 10は支点附近(図-3)でIを変化させた時の比較である。

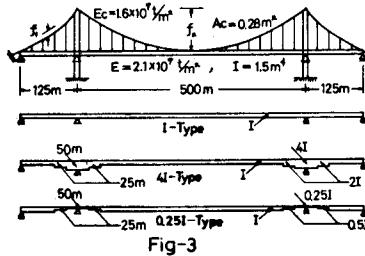


Fig-3

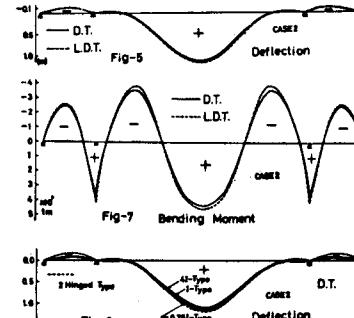


Fig-5 Deflection



Fig-7 Bending Moment



Fig-9 Deflection

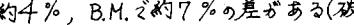


Fig-10 Bending Moment

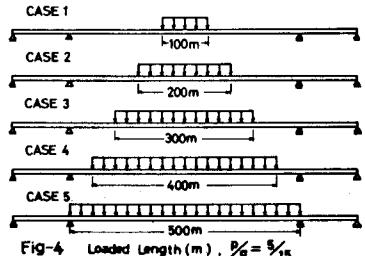


Fig-4 Loaded Length (m).  $\beta_g = \frac{5}{15}$

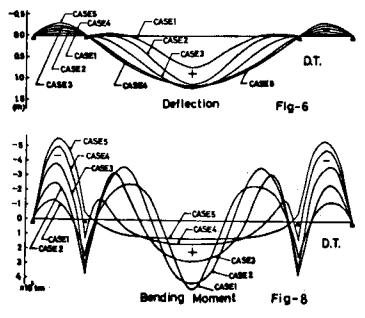


Fig-6 Deflection

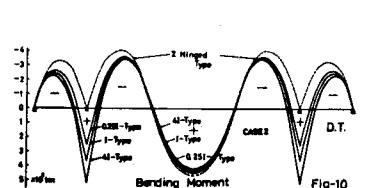


Fig-8 Bending Moment

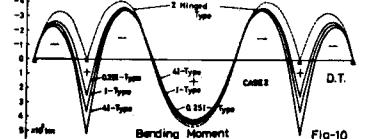


Fig-10 Bending Moment

### 4. あとがき

本解析法は次のようない点がある。(1). 集中荷重および部分分布荷重が要素の中間に作用してもよい。(2). 三径間連続吊橋は三要素で解剖することができる(等断面の場合)。(3). 式(2)の撓みの面積は要素の分割数に関係なく正確に求まる。(4). 小型の計算機で十分に求められる。(5). 式(8)の $H_p$ は2, 3回で収束する。(6). 数値計算だけに落ちの心配はない。(7). 变断面の場合の計算も出来る。(8). 本解析法は荷度理論による限り、線形化荷度理論の場合は厳密解である。数値計算例から次のよう結果が得られた。(1). 従来の応力法による解析(等断面)と本解析法は数値計算の結果全く一致している。(2). 軸力<sup>1)</sup>の方法と本解析法とでは若干の差異が生じる。前者は分布荷重を多数の集中荷重に置換した近似解のためである。(3). 本解析法で要素を1/20分割して、各点の撓みを求め、その面積をシンプソン公式を用いて $H_p$ を求めて解剖した場合と本解析法とでは有効数字7桁まで一致している。(4).  $\beta_g = 1/3$ であるので、線形化荷度理論と荷度理論とでは、撓みに關して約4%, 曲げモーメントに關して約7%の差がある。最後に、塔の曲げ剛性を考慮した場合、三径間吊橋の場合、また、本解析法と同様手法による吊橋のねじり解析についてもプログラム化は終つており、別の機会に発表する予定である。計算は北海道大学大型計算センターのFACOM 230-75を用いた。参考文献 1). 渡江等、佐藤告一：吊橋の剛性マトリックスによる解析法、土木学会第30回年次学術講演会講演概要集 第工部 (1975)。