

北海道大学工学部 正 員 ○ 佐藤 浩一

北海道大学工学部 正 員 渡辺 早

本四連絡橋公団 正 員 大島 久

1. まえがき 先に発表した論文¹⁾は分布荷重を多数の集中荷重に置換し、吊橋の線形化撓度理論の解析を剛性マトリックス法で行なったものであり、置換するところに厳密性に欠ける感があり、精度を上げるために分割数を増す必要性があった。本報告は要素の中間に集中荷重および部分分布荷重が作用する場合の吊橋の線形化撓度理論の剛性マトリックスをラプラス変換を用いて誘導したものであり、分割数を極端に少なくすることが出来る。数値計算としては、本解析法で分割数を少なくして H_p を厳密に求め解析する方法(解法1)、従来からの応力法(解法2)、本解析法で分割数を多くして H_p をシンプソン公式を用いて求め解析する方法(解法3)、論文¹⁾による方法(解法4)の4通りを比較検討し、撓度理論との比較も行なった。

2. 吊橋の剛性マトリックスのラプラス変換による誘導(曲げ解析)

膜理論による場合の吊橋の数分方程式は次の2本の式である。

$$EI v''(x) - H v''(x) = p(x) + H_p y'' \quad \dots (1), \quad H_p \left(\frac{L}{EI} + y'' \right) v(x) dx = 0 \quad \dots (2)$$

式(1)は図-1のような荷重状態の桁と考えることが出来るから、次式のようになる。

$$EI v''(x) - H v''(x) = P \delta(x-a) + p \{ E(x-a) - E(x-b) \} + H_p y'' \quad \dots (1)', \quad \text{この式(1)'}$$

をラプラス変換して、逆変換を行ない、境界条件 $x=0$ で、 $v(0)$, $v'(0)$, $Q(0)$, $M(0)$ を

与え、 $v''(0) = -\frac{M(0)}{EI}$, $v'(0) = -\frac{Q(0)}{EI} + \mu^2 v(0) \quad \dots (3)$ を用いて、撓み、撓み角、剪断力、曲げモーメントを求めれば、次のようになる。ここでは、微分方程式の符号を剛性マトリックスの符号になおしてある(図-2)。

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ v'(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & \frac{1}{H} \sinh \mu x & \frac{1}{H\mu} (\sinh \mu x - \mu x) & \frac{1}{H} (1 - \cosh \mu x) \\ 0 & \cosh \mu x & \frac{1}{H} (\cosh \mu x - 1) & -\frac{\mu}{H} \sinh \mu x \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H} \sinh \mu x & \frac{1}{H} \sinh \mu x & -\cosh \mu x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ Q(0) \\ M(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P A_1(x, \xi) \\ P B_1(x, \xi) \\ P C_1(x, \xi) \\ P D_1(x, \xi) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p \{ A_2(x, a) - A_2(x, b) \} \\ p \{ B_2(x, a) - B_2(x, b) \} \\ p \{ C_2(x, a) - C_2(x, b) \} \\ p \{ D_2(x, a) - D_2(x, b) \} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} H_p y'' \{ A_2(x, 0) - A_2(x, l) \} \\ H_p y'' \{ B_2(x, 0) - B_2(x, l) \} \\ H_p y'' \{ C_2(x, 0) - C_2(x, l) \} \\ H_p y'' \{ D_2(x, 0) - D_2(x, l) \} \end{Bmatrix} \quad \dots (4)$$

ここで、 $A_1(x, \xi) = \frac{1}{H\mu} \{ \sinh \mu(x-\xi) - \mu(x-\xi) \} E(x-\xi)$, $B_1(x, \xi) = \frac{1}{H} \{ \cosh \mu(x-\xi) - 1 \} E(x-\xi)$, $C_1(x, \xi) = -1$, $D_1(x, \xi) = \frac{1}{H} \sinh \mu(x-\xi) E(x-\xi)$, $A_2(x, a) = \frac{1}{H\mu^2} \{ \cosh \mu(x-a) - 1 - \frac{1}{2} \mu^2(x-a)^2 \} E(x-a)$, $C_2(x, a) = -(x-a) E(x-a)$, $B_2(x, a) = \frac{1}{H\mu} \{ \sinh \mu(x-a) - \mu(x-a) \} E(x-a)$, $D_2(x, a) = \frac{1}{\mu^2} \{ \cosh \mu(x-a) - 1 \} E(x-a)$ である。以上を式(4)とする。

従って、 $v(x) = v_p(x) + v_{H_p}(x) \quad \dots (5)$, 式(5)で $v(x)$ は正確に求まる。式(5)を式(2)に代入し、 $v'(x)$ の面積を求めれば、 $H_p = -y'' \frac{P}{EI} \{ [Q]_i^T \{ U_p \}_i + \sum \{ P, \xi, p, a, b \}_i \} / \left(\frac{L}{EI} + y'' \sum \{ [Q]_i^T \{ U_{H_p} \}_i \} + \sum \{ 0, 0, 1, 0, l \}_i \right) \quad \dots (6)$

で H_p は求まる。ここで、 $[Q]^T = [1, \frac{1}{H} (\cosh \mu l - 1), \frac{1}{H\mu^2} (\cosh \mu l - 1 - \frac{1}{2} \mu^2 l^2), -\frac{1}{H\mu} (\sinh \mu l - \mu l)]$, $\{ U_p \}^T = [v_p(0), v_p'(0), Q_p(0), M_p(0)]$, $\{ U_{H_p} \}_i^T = [v_{H_p}(0), v_{H_p}'(0), Q_{H_p}(0), M_{H_p}(0)]$, $\sum \{ P, \xi, p, a, b \} = \frac{P}{H} \frac{1}{\mu^2} \{ \cosh \mu(l-\xi) - 1 - \frac{1}{2} \mu^2(l-\xi)^2 \} + \frac{P}{H} \frac{1}{\mu} \{ \sinh \mu(l-a) - \mu(l-a) - \frac{1}{2} \mu^2(l-a)^2 \} - \{ \sinh \mu(l-b) - \mu(l-b) - \frac{1}{2} \mu^2(l-b)^2 \}$ 。

式(4)で $x=l$ として分割マトリックスを用いて変形すれば剛性マトリックス(右手座標系)が求まる。

$$\begin{Bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ Q(l) \\ M(l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(l) \\ v'(l) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P A(l-\xi) \\ -P B(l-\xi) \\ P A(\xi) \\ -P B(\xi) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p f(l-a, l-b) \\ -p g(l-a, l-b) \\ -p f(a, b) \\ -p g(a, b) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} H_p y'' f(l, 0) \\ -H_p y'' g(l, 0) \\ -H_p y'' f(0, l) \\ -H_p y'' g(0, l) \end{Bmatrix} \quad \dots (7)$$

$$\Delta = \frac{H^2}{2 - 2 \cosh \mu l + \mu l \sinh \mu l}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{H}{EI}}, \quad \mu \text{ は要素数,}$$

$$E(x-\xi), E(x-a), E(x-b)$$

はステップ関数である

$$k_{11} = k_{33} = -k_{13} = -k_{31} = \frac{H}{H} \sinh \mu l, \quad k_{22} = k_{44} = -\frac{1}{H\mu} (\sinh \mu l - \mu l \cosh \mu l),$$

$$k_{12} = k_{21} = k_{14} = k_{41} = -k_{23} = -k_{32} = -k_{34} = -k_{43} = \frac{1}{H} (\cosh \mu l - 1), \quad k_{24} = k_{42} = \frac{1}{H\mu} (\sinh \mu l - \mu l),$$

$$A(\xi) = \frac{1}{H^2} \{ \sinh u \cdot l (\sinh u \xi - u \xi) - (\cosh u \cdot l - 1) (\cosh u \xi - 1) \}, B(\xi) = \frac{1}{H^2} \{ (\sinh u \cdot l - u l) (\cosh u \xi - 1) - (\cosh u \cdot l - 1) (\sinh u \xi - u \xi) \},$$

$$f(a, b) = \frac{1}{H^2 u} \{ \sinh u a \cdot l \{ (\cosh u a - 1 - \frac{1}{2} u^2 a^2) - (\cosh u b - 1 - \frac{1}{2} u^2 b^2) \} - (\cosh u \cdot l - 1) \{ (\sinh u a - u a) - (\sinh u b - u b) \} \},$$

$$g(a, b) = \frac{1}{H^2 u} \{ (\sinh u \cdot l - u l) \{ (\sinh u a - u a) - (\sinh u b - u b) \} - (\cosh u \cdot l - 1) \{ (\cosh u a - 1 - \frac{1}{2} u^2 a^2) - (\cosh u b - 1 - \frac{1}{2} u^2 b^2) \} \}$$

式(7)を用いて、吊橋構造全体の剛性マトリックスを作り、支点処理し、 $\{U_p\}$ と $\{U_{sp}\}$ を求めればよい。
従って、 H_p が求まり、式(4)に代入すればよい。以上は $H=H_g+H_p$ の H を一定とした線形化流度理論であるが、流度理論の場合は、式(6)で吊荷重によるケーブルの付加水平張力 H_{p1}, H_{p2}, H_{p3} の3種類を求め、Lagrangeの補間公式 $H_p = (H_{p1} \cdot H_{p3} - H_{p2}^2) / (H_{p1} + H_{p3} - 2H_{p2}) \dots (8)$ を用い、収束条件は $|(H_p - H_{pi}) / H_p| \leq 10^{-4}$ とした。

3. 数値計算例

例としては図-3のような三径間連続吊橋とした。

断面諸元は $f_1 = 3.125m$,

$f_2 = 50m$, $R_1 = R_2 = 6.25m$,

$L_c = 851.25m$, $H_g = 9375ton$.

解法1(本解析法, 3分割) 厳密解
解法2(応力法) (膜理論)

解法3(本解析法, 120分割) 近似解
解法4(置換法, 120分割)

を比較すれば、図-5, 7より解法1, 2, 3は読み、B.M.とも有効数字7桁まで一致しており、

解法4は読みで4桁まで、B.M.

は3桁まで一致している(図-5

は破線、実線とともに4通り重なっている)。線形化流度理論(L.D.T.)と流度理論(D.T.)とは読みで約4%、B.M.は約7%の差がある(破線と実線)。図-6, 8はD.T.で載荷長(図-4)を変化させた時の比較であり、図-9, 10は支点付近(図-3)で I を変化させた時の比較である。

4. あとがき

本解析法は次のような利点がある。(1). 集中荷重および部分分布荷重が要素の中間に作用してもよい。(2). 三径間連続吊橋は三要素で解析することが出来る(等断面の場合)。(3). 式(2)の読みの面積は要素の分割数に関係なく正確に求まる。(4). 小型の計算機で十分に求められる。(5). 式(8)の H_p は2, 3回で収束する。(6). 数値計算だけした落ちの心配はない。(7). 変断面の場合の計算も出来る。(8). 本解析法は膜理論による限り、線形流度理論の場合は厳密解である。数値計算例がう次のような結果が得られた。(1). 従来の応力法による解析(等断面)と本解析法は数値計算の結果全く一致している。(2). 板文¹⁾の方法と本解析法とは若干の差異が生じているのは前者は分布荷重を多数の集中荷重に置換した近似解のためである。(3). 本解析法で要素を120分割して、各点の読みを求め、その面積をシンプソン公式を用いて H_p を求めた場合と本解析法とは有効数字7桁まで一致している。(4). $P_g = 1/3$ であるので、線形化流度理論と流度理論とは、読みに関して約4%、曲げモーメントに関して約7%の差がある。最後に、塔の曲げ剛性を考慮した場合、三径間吊橋の場合、また、本解析法と同様手法による吊橋のねじり解析についてもプログラム化は終わっており、別の機会に発表する予定である。計算は北海道大学大型計算機センターのFACOM230-75を用いた。参考文献 1). 渡辺 昇, 佐藤浩一: 吊橋の剛性マトリックスによる解析法, 土木学会第30回年次学術講演会講演概要集 第I部 (1975)。

