

1. まえがき 近年、電子計算機の発達に伴ない、ナビエ・ストークスの方程式の数値解法が可能とな、た。従来広く使われてきたのは差分法による解法であるが、最近、有限要素法の適用もなされ始めている。¹⁾²⁾有限要素法の特徴は、現象を局所的に近似したものをよせ集めて全体の近似を行うことで、このため、不規則な形状、多連結領域、混合境界条件等と扱う際も、差分法が出会うような困難はいさくない。ところで、物体周囲の流れの解析は広く行われているが、そのうち、運動する物体を扱ったものは、Bratanow²⁾、岡島³⁾、Lugt⁴⁾の方法がある。いずれも二次元、非圧縮流としての解析である。岡島は、物体に固定した曲線座標を用い、差分法によって、回転、並進運動する円柱や、並進運動する円柱まわりの解析を行っている。Bratanowは、有限要素法により、振動する物体表面の境界条件はラグランジュ乗数法により満足させている。Lugtは、岡島と同じく物体に固定した曲線座標を用いて、差分法により、回転する円柱まわりの流れを解いている。岡島、Lugtの方法は、曲線座標を用いているため、円または円柱に限えず、前者は円柱以外は並進運動のみ、後者は、一様な回転のみが扱える。Bratanowの方法は、一応、任意形状物体の任意の運動も扱えるが、ラグランジュ乗数法によって、物体表面の境界条件が精度よく満足されるかどうか疑問が残る。ここで述べる方法は、有限要素法にもとづき、任意形状の物体に適用でき、物体に固定した座標系を用いて物体表面の境界条件を精度よく満足させることができ、かつ、任意に回転、並進運動する物体まわりの流れの解析ができるものである。

2. 方程式と境界条件 図-1に示すように、任意に並進、回転運動する物体に固定した座標に対する二次元、非圧縮流の方程式は、次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial t} + (\mathbf{q}_0 \cdot \nabla) \mathbf{q}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{q}_0 - \left(\frac{d\mathbf{q}_0}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_0 + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_0 - \omega^2 \mathbf{r}_0 \right) \quad \text{----- (1)}$$

ここで、 $\mathbf{q}_0$ は、物体に固定した座標系で表わした速度ベクトル、 P は圧力、 ρ は密度、 ν は動粘性係数、 $\boldsymbol{\omega}$ は角速度ベクトル、 ω はその大きさ、 $\mathbf{r}_0$ は、物体に固定した座標系で表わした位置ベクトル、 $\mathbf{q}_0$ は、物体の並進運動の速度ベクトル、 t は時間である。ところで、 $\mathbf{q}_0 = (u, v)^T$ として、 $\frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial t} = u, \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial x} = -v$ なる関係を満たす流れ関数 ψ_0 が存在する。また、渦度 $\zeta_0 = \nabla \times \mathbf{q}_0$ とすれば、以下の方程式が導かれる。

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + (\mathbf{q}_0 \cdot \nabla) \zeta_0 + 2 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \nu \nabla^2 \zeta_0 \quad \text{----- (2)}$$

$$\nabla^2 \psi_0 = -\zeta_0 \quad \text{----- (3)}$$

ここで、 $\mathbf{q}_0^* = \mathbf{q}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$ 、 $\psi_0^* = \psi_0 - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0) \omega$ 、 $\zeta_0^* = \zeta_0 + 2\omega$ なる $\mathbf{q}_0^*$ 、 ψ_0^* 、 ζ_0^* を用いると、

$$\frac{\partial \zeta_0^*}{\partial t} + \{(\mathbf{q}_0^* - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) \cdot \nabla\} \zeta_0^* = \nu \nabla^2 \zeta_0^* \quad \text{----- (2)'}$$

$$\nabla^2 \psi_0^* = -\zeta_0^* \quad \text{----- (3)'}$$

なる式を得る。物体が回転するので、上流側、下流側境界は、時間により変化する。無限遠における流体の、物体に対する相対速度を考え、その境界法線方向成分が負ならば上流側、正ならば下流側とする。上流側では、

$$\zeta_0^* = 0 \quad \text{----- (4)} \quad \frac{\partial \psi_0^*}{\partial n} = -V_\infty \quad \text{----- (5)}$$

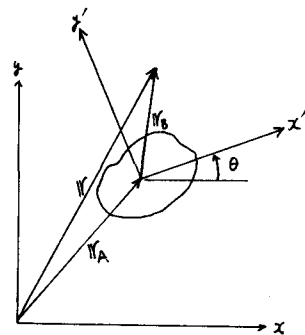


図-1 座標系

ここで、 η は法線方向距離、 V_∞ は、無限遠における流体の、物体に対する相対流速の、接線方向成分である。
下流側では、

$$\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial t} + (V_\infty \cdot \nabla) \mathcal{S}_0 = 0 \text{ ----- (6), } \frac{d\mathcal{S}_0}{dt} + \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial t} + (V_\infty \cdot \nabla) \mathcal{S}_0 - (V_\infty \cdot \nabla)(\omega \times \mathcal{V}_0) + 2\omega \times \mathcal{V}_0 + \omega^2 \mathcal{V}_0 = 0 \text{ ---- (7)}$$

ここで、 $V_\infty = V_0 - \omega \times \mathcal{V}_0$ で、 V_0 は、無限遠における、流体の物体に対する相対流速である。

3. 有限要素近似 領域を、三角形のメッシュで分割し、メッシュ内で、 $\mathcal{S}_0, \mathcal{V}_0$ は線型に変化するものとする。即ち、内挿関数ベクトルを $(\mathcal{V}_0)^t = (\mathcal{V}_1^t, \mathcal{V}_2^t, \mathcal{V}_3^t)$ としたとき、 $\mathcal{V}_i^t$ は、第 i 要素の第 i 面積座標に等しい。このとき、(2), (3) 式の有限要素近似は、以下のように書ける。

$$M^* \frac{d\mathcal{S}_0}{dt} + A^* \mathcal{S}_0 + \nu K^* \mathcal{S}_0 = 0 \text{ ----- (8-a) } \quad K^* \mathcal{V}_0 = M^* \mathcal{S}_0 + B_\psi \text{ ----- (8-b)}$$

ここで、 $\mathcal{S}_0, \mathcal{V}_0$ は、各節点での $\mathcal{S}_0, \mathcal{V}_0$ をあらわすベクトル、 M^*, A^*, K^*, B_ψ は、以下のように与えられる。

$$M^* = \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} \psi^t (\psi^t)^t dx dy, \quad A^* = \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} \left\{ \psi^t \left(\frac{\partial \psi^t}{\partial y} \right)^t \psi_x^t \left(\frac{\partial \psi^t}{\partial x} \right)^t - \left(\frac{\partial \psi^t}{\partial x} \right)^t \psi_x^t \left(\frac{\partial \psi^t}{\partial y} \right)^t \right\} dx dy, \quad K^* = \sum_{\Delta} \left\{ \left(\frac{\partial \psi^t}{\partial x} \right)^t \left(\frac{\partial \psi^t}{\partial x} \right)^t + \left(\frac{\partial \psi^t}{\partial y} \right)^t \left(\frac{\partial \psi^t}{\partial y} \right)^t \right\} dx dy$$

$$B_\psi = \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \psi^t g_\psi ds, \quad \psi_x = \mathcal{V}_0 + \frac{1}{2} (\mathcal{V}_0 \cdot \mathcal{V}_0) \omega \text{ で、 } \psi_x^t \text{ は、第 } i \text{ 要素の節点における } \psi_x \text{ の値、 } g_\psi \text{ は、}$$

境界において、 $g_\psi = \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial n}$ を満足させる関数である。

また物体上における境界条件は、

$$\mathcal{V}_0^* = -\frac{1}{2} (\mathcal{V}_0 \cdot \mathcal{V}_0) \omega \text{ ----- (9) } \quad \mathcal{S}_0^* = -\left[3 \left\{ \left(\mathcal{V}_0^* \right)' - \mathcal{V}_0^* / 2 \right\} + \frac{1}{2} (\mathcal{S}_0^*)' \right] + 3\omega \left[1 - \left\{ \frac{\mathcal{V}_0 \cdot \mathcal{V}_0}{2} - \frac{\mathcal{V}_0 \cdot \mathcal{V}_0}{2} \right\} \right] \text{ (10)}$$

ここで、 $(\mathcal{V}_0^*)', (\mathcal{S}_0^*)', \mathcal{V}_0^*$ は、境界に近接した節点における値で、 ω は、その節点と境界との垂直距離である。

(8-a) 式の積分には、最も簡単な Euler の方法を用いた。即ち、

$$(\mathcal{S}_0)_{t+\Delta t} = (\mathcal{S}_0)_t + \Delta t M_{inv}^{-1} (-A^* - \nu K^*) (\mathcal{S}_0)_t \text{ ----- (11)}$$

ここで、 $(\mathcal{S}_0)_t$ は、時刻 t における値を示し、 M_{inv} は、 M^* を対角化したものである。

(11) 式の安定性確保のためには、行列 $\Delta t M_{inv}^{-1} (A^* + \nu K^*)$

の絶対値最大の固有値が 1 を越えぬことが必要である。

よって、 $\Delta t M_{inv}^{-1} (A^* + \nu K^*)$ の絶対値最大の固有値より小さい。

ここで、添字 H_i は、要素についての行列を示す。結局、

$$\lambda \leq 3\nu \Delta t \left\{ \frac{1}{H_1^2} + \frac{1}{H_2^2} + \frac{1}{H_3^2} \right\} + \sqrt{\frac{1}{H_1^2 H_2^2} + \frac{1}{H_2^2 H_3^2} + \frac{1}{H_3^2 H_1^2} - \frac{1}{H_1^2 H_2^2} - \frac{1}{H_2^2 H_3^2} - \frac{1}{H_3^2 H_1^2}}$$

となり、ここから必要な時間きざみ Δt が得られる。ただし、 H_i は、三角形の垂線の長さである。

4. 計算結果 上記の計算法を、最初静止した長

方形物体まわりの解析に用い ($Re=100$)、結果を既存の結果

と比較した。次に、回転運動する円 (長軸=2, 短軸=1,

$Re=25, \theta=0.1 \sin(\pi t)$) に適用した。(図-2) 全体的な流れの状態は既存の結果と一致しているが、物体表面

の圧力はやや誤差が大きい。これは、物体表面付近の、

$\mathcal{S}_0$ の変化率が正しく求まらなかつたため、今後要素の

改良等を行、精度を上げる予定である。

参考文献

- 1) S.L.Smith, C.A.Brebbia; Finite Element Solution of Navier-Stokes Equation for Transient Two-dimensional Incompressible Flow, Journal of Computational Physics 17, 235-245 (1975)
- 2) T.Bratanow, A.Ecer, M.Kobiske; Finite Element Analysis of Unsteady Incompressible Flow around an Oscillating Obstacle of arbitrary Shape, AIAA Paper No. 73-91, (1973)
- 3) 岡島厚, 高田浩, 浅田強; 振動する物体まわりの非定常粘性流れ, 日本機械学会論文集 37巻304号 (昭46-12)
- 4) H.J.Lugt, H.J.Haussling; Laminar Flow past an Abruptly Accelerated Elliptic Cylinder at 45° Incidence, Journal of Fluid Mechanics 65, 711-734 (1974)

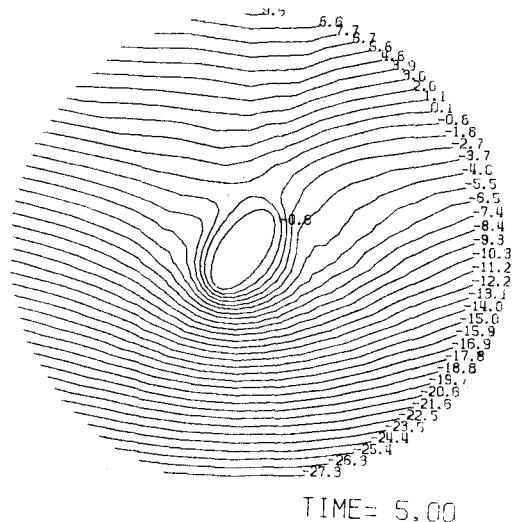


図-2 流れ関数