

東京工業大学 学生員 松田 隆

東京工業大学 正 員 吉田 裕

東京工業大学 正 員 増田陳紀

§1 まえがき 本報告は、薄板で構成される立体構造の幾何的および材料非線形性を考慮した増分法による一解析法を示し、その有効性を検討したものである。個々の要素は、線形ひずみ-変位関係に基づくものとし、基本的には、1節点6自由度計18自由度の三角形薄板要素を用いた。ひずみ-変位関係の非線形項は、節点変位および節点力の基準座標への変換行列の増分を考慮することによって、複数の要素で構成される全体系において評価し得るという前提に立って基本的な関係式を誘導している。材料非線形性はBauschinger効果および板厚方向の塑性域進展などを含めて評価し得るようにモデル化を行なった。増分制御は荷重制御、変位制御を併用した。

§2 幾何的非線形性 (n)段階で釣合が満されているとき、(n)段階と(n+1)段階の間の節点力増分 $\{\Delta F\}$ 、節点変位増分 $\{\Delta U^*\}$ は、それぞれ式(1)、(2)のように表わされる。

$$\{\Delta F\} = [\Delta T]^T \{F_m^*\} + [T_m]^T \{\Delta F^*\} + [\Delta T]^T \{\Delta F\}, \quad \{\Delta U^*\} = [\Delta T]\{U_m\} + [T_m]\{\Delta U\} + [\Delta T]\{\Delta U\} \quad \dots (1), (2)$$

ここで、 $[T]$ は空間に固定した基準座標系から要素の移動に伴う要素座標系への変換行列であり、 $\{F\}$ は節点力、 $\{U\}$ は節点変位、 $*$ は要素座標系、 $\Delta$ は増分を表わす。要素座標系での接線剛性行列を $[K^*]$ とし、各要素においては式(4)が満されるとき、基準座標系における節点力と節点変位の増分関係は、式(1)、(2)の高次項を無視して、式(3)のように表わすことができる。

$$\{\Delta F\} = [\Delta T]^T \{F_m^*\} + [T_m]^T [K^*] [\Delta T] \{U_m\} + [T_m]^T [K^*] [T_m] \{\Delta U\}, \quad \{\Delta F^*\} = [K^*] \{\Delta U^*\} \quad \dots (3), (4)$$

座標変換行列 $[T_m]$ は、(n)段階の節点の座標 $\{X_0\} + \{U_m\}$ の関数となるから、 $[\Delta T]$ と $\{\Delta U\}$ の1次の項で近似的に評価するものとするれば、式(3)の右辺第1項および第2項は $\{\Delta U\}$ によって、式(5)(6)のように表わすことができる。

$$[\Delta T]^T \{F_m^*\} = \left[ \frac{\partial [T]^T \{F_m^*\}}{\partial \{U\}} \right]_{[U]} \{\Delta U\} = [K_{I(n)}] \{\Delta U\}, \quad [\Delta T] \{U_m\} = \left[ \frac{\partial [T] \{U_m\}}{\partial \{U\}} \right]_{[U]} \{\Delta U\} = [K_{II(n)}] \{\Delta U\}, \quad [\Delta T] = \left[ \frac{\partial [T]}{\partial \{U\}} \right]_{[U]} \{\Delta U\} \quad \dots (5), (6), (7)$$

したがって基準座標に関する節点力増分 $\{\Delta F\}$ と節点変位増分 $\{\Delta U\}$ との関係は、式(8)のように得られる。

$$\{\Delta F\} = [[T_m]^T [K^*] [T_m] + [K_{I(n)}] + [T_m]^T [K^*] [K_{II(n)}]] \{\Delta U\} = [K_0] + [K_F] + [K_U] \{\Delta U\} \quad \dots (8)$$

§3 降伏判定・構成方程式 Von Misesの降伏条件とPragerの移動硬化則をとり入れ、2軸応力状態でのBauschinger効果を評価するようモデル化した。すなわち、弾性状態および塑性状態の応力増分-ひずみ増分マトリックスを次のように与えた。

$$\text{弾性} = f(\sigma, \epsilon^p) < \sigma_Y : [D(n)] = E [D] \quad , \quad \text{塑性} = f(\sigma, \epsilon^p) \geq \sigma_Y : [D(n)] = E_t [D] \quad [D] = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

ここで、 $f(\sigma, \epsilon^p) = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - C\epsilon_x^p)^2 + (\sigma_y - C\epsilon_y^p)^2 + (\sigma_z - 2C\epsilon_z^p)^2 + 6(C\epsilon_{xy}^p - C\epsilon_{xy}^p)^2}$ 、 $\epsilon^p$ : 塑性ひずみ、 $\sigma_Y$ : 降伏応力、 $C = \frac{E - E_t}{E}$ 、 $E$ : ヤング率

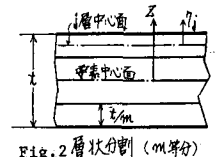
§4 板厚方向の層状分割と弾塑性剛性行列 板厚方向への塑性域の進展を考慮するために要素を層状に分割した(Fig.1)。板厚方向のひずみは直線的に分布するものとし、各層内では $[D(n)]$ を一定とした。ひずみ増分 $\{\Delta \epsilon\}$ は、面内ひずみ成分 $\{\Delta \epsilon_p\}$ および曲げひずみ成分 $\{\Delta \epsilon_b\}$ によって、式(9)のように表わされる。

$$\{\Delta \epsilon\} = \{\Delta \epsilon_p\} - z \{\Delta \epsilon_b\} \quad \dots (9)$$

(n)段階の釣合が満されているとき、各要素の釣合方程式は仮想仕事の原理式(10)によつて得られる。

$$A \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_j} \delta \{\Delta \epsilon\}^T \{\Delta \sigma\} d\Omega_j - \delta \{\Delta U^*\}^T \{\Delta F^*\} = 0 \quad A: \text{要素面積} \quad \dots (10)$$

式(10)に式(7)を代入して得られる剛性行列は、通常の平面応力剛性行列に対応する項 $[K_{pp}]$ 、平板曲げ剛性行列に対応する項 $[K_{bb}]$ 、および面内力と曲げの連成項 $[K_{pb}]$ 、 $[K_{bp}]$ の和として表わされる。 $[K_{pb}]$ は式(11)で与えられる。



$$\{K_{pb}\} = -A \int_{-L}^L \{B_p\}^T \{D_m\} \{B_b\} d\eta = \{K_{bp}\}^T \quad \dots (1)$$

$$\{\Delta E_p\} = \{B_p\} \{\Delta U_p^*\}, \{\Delta E_b\} = \{B_b\} \{\Delta U_b^*\}$$

§5. 解析例. 上記の解析法の有効性を検討するためにおこなった計算例のうち3種類の計算結果を示す。Fig.2は浅いアーチに等分布荷重を加えたときの荷重比-ライズ比曲線を理論解と比較して示したものである。Fig.4は初期たわみ(Sinの半波長)と有するH型断面柱(Fig.3)に軸圧縮力を加えたときの荷重-横たわみ曲線である(両端は回転自由)。Fig.5, Fig.6は、本研究における薄板要素によってエラスティカに対応する問題を解析した結果である(初期たわみと与えた)。Fig.5は変形状態を、Fig.6は荷重と上端の水平変位の関係を示す曲線である。層数はすべて10層で計算した。

最後に、本研究に文部省科学研究費補助金を受けたことを付記する。

【参考文献】 1) J.H. ARGYRIS: *Continuous and Discontinuous, Proc. Conf. Matrix Meth. in St. Mech.*, 1965 2) 吉田他: 立体構造解析のための薄板有限要素, 土橋集 No.211, 1973 3) 藤田他: 非線形と有る構造物の強度について(初報), 造船論集, No132, 1972



$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$   
 $E_t = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$   
 $\sigma_y = 2860.0 \text{ kg/cm}^2$

(cm)

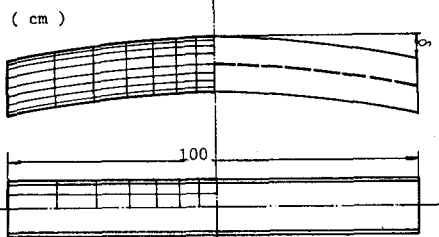


Fig.3 H-Section Beam with Initial Deformation

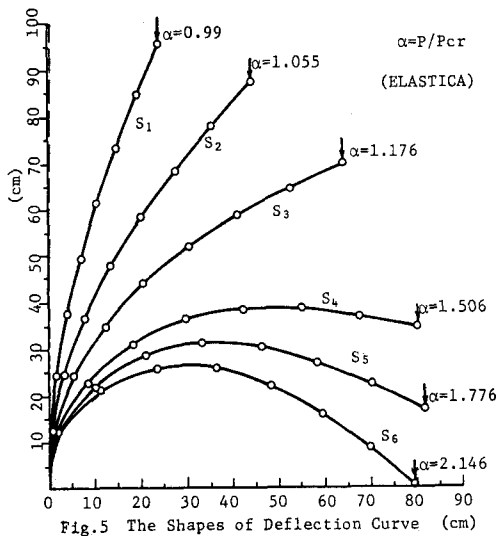


Fig.5 The Shapes of Deflection Curve (cm)

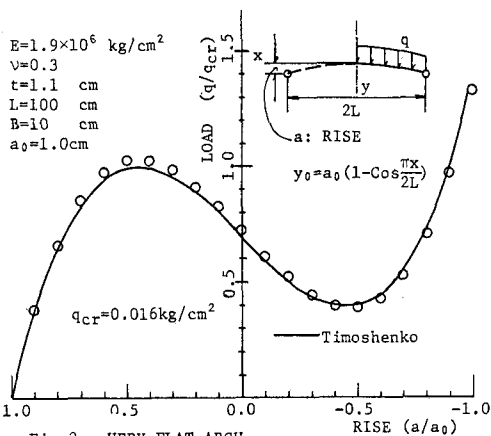


Fig.2 VERY FLAT ARCH

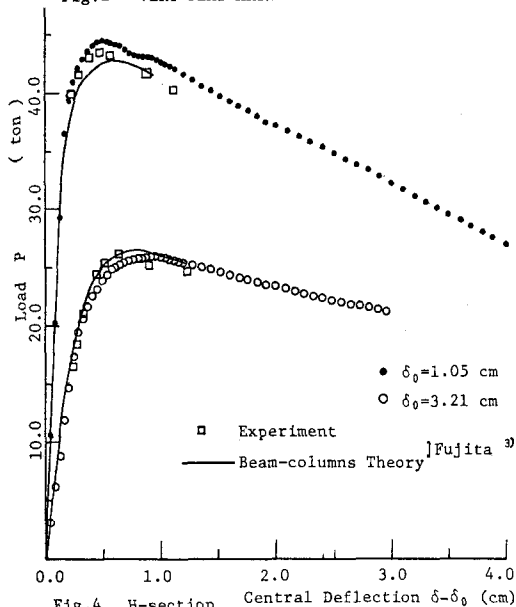


Fig.4 H-section Central Deflection  $\delta - \delta_0$  (cm)

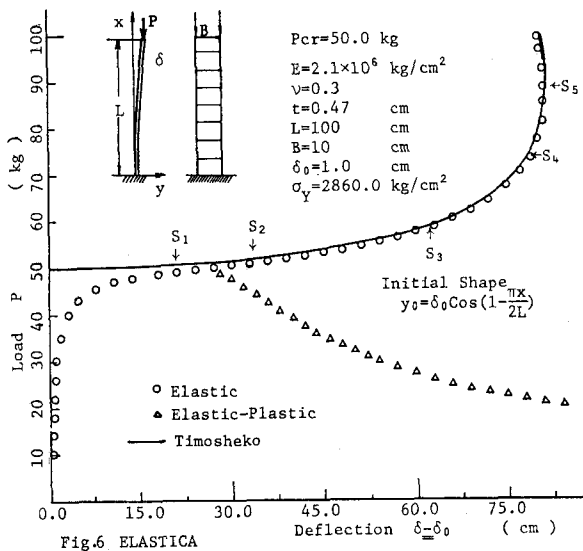


Fig.6 ELASTICA