

大阪大学工学部 正会員 林 正
 大阪大学工学部 正会員 前田 幸雄
 日本鋼管重工部 正会員 中村 滋

1. まえがき

骨組部材の弾塑性解析は、実験とともに数多くの解析結果が報告されている。また、立体骨組構造物の弾塑性解析も、塑性ヒンジ理論を用いた研究は行なわれているが、塑性域の広がりや考慮した研究は極めて少ないのが現状である。この理由は、現在ではマトリックス解析法を用いれば複雑な立体構造物も理論的には解析できるが、板構造における有限要素法と同じく、数値計算において大きな障害が生じるためである。本文では塑性域の広がりや部材の断面内と部材軸方向にも考慮して、できるだけ精度の高い解式を求め、かつ過去に発表した有限回転の概念から導かれる諸式²⁾を用いて、実際の骨組構造物にも適用できる解析法について報告する。

2. 薄肉断面材の有限変位とひずみ

本文で用いた主な解析仮定を列挙する。

① 骨組部材は、薄肉断面の2軸対称な等断面直線材である。② 部材長は断面寸法に比べて十分長く、板厚は他の断面寸法に比べて十分小さい。③ 部材断面の板厚中心線の形状は不変である。④ 薄板の変形に関しては、Kirchhoff-Love の仮定が成立する。⑤ 曲げによるせん断変形と、曲げねじりの影響は無視する。

⑥ 材料は完全弾塑性体である。⑦ Prandtl-Reuss のひずみ増分理論と、Mises の降伏条件が適用できる。解析仮定③は、通常の棒理論で用いられている断面剛の仮定であるが、有限回転を厳密に扱えば、Euler-Bernoulli の仮定が必然的に成立する。また、断面内の一部に塑性域が発生しても、中立軸の移動は考慮しない。

図-1 に示すように、断面の重心点 O を原点とする直交右手系座標と、板厚中心線上の点 $C(0, \bar{y}, \bar{z})$ を原点とする直交曲線座標の2つの移動座標系を用いる。断面内の変位とひずみには Lagrange 表示を用いることにする。

有限回転から導かれる回転行列を用いれば、仮定③より板厚中心線上の変位 $\bar{d}$ は重心点の変位 d_0 を用いて表わすことができる²⁾。この有限変位 $\bar{d}$ は、次のグリーンのひずみテンソルを O にする。

$$\bar{\epsilon}_{\eta\eta} - \bar{\epsilon}_{\xi\xi} = 2\bar{\epsilon}_{\eta\xi} = 0 \quad (1)$$

図-1 にて、 s 軸の単位接線ベクトルを t 、 x 軸と n 軸方向の単位ベクトルを x 、 n とし、変形後、これらは x^* 、 n^* になったものとする。Kirchhoff-Love の仮定は、

$$x^* \cdot n^* = 0, \quad x^* \cdot x^* = 1, \quad |n^*| = 1 \quad (2)$$

と表わすことができるから、 x^* 、 n^* を中央面上の変位 $\bar{d}$ で表わし、これに前述の $\bar{d}$ を代入すれば、断面内の任意な点 $P(x, s, n)$ の変位 d を、断面重心点の変位 d_0 で表わすことができる³⁾。

点 P のひずみテンソルは、変形前後の位置ベクトルを用いて、ひずみ定義式¹⁾より次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left\{ (x^*)^2 - 1 \right\} - \left(n^* \cdot \frac{\partial x^*}{\partial x} \right) n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial n^*}{\partial x} \right)^2 n^2 \\ \epsilon_{ss} &= \left[\frac{1}{2} \left\{ (s^*)^2 - \left(1 - \frac{n^2}{R} \right) \right\} - \left(n^* \cdot \frac{\partial s^*}{\partial s} \right) n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial n^*}{\partial s} \right)^2 n^2 \right] / \left(1 - \frac{n^2}{R} \right) \\ 2\epsilon_{xs} &= \left[(x^* \cdot s^*) - n^* \cdot \left(\frac{\partial x^*}{\partial x} + \frac{\partial s^*}{\partial s} \right) n + \left(\frac{\partial n^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial n^*}{\partial s} \right) n^2 \right] / \left(1 - \frac{n^2}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3. a-c)$$

ここに、 R は板厚中心線の曲率半径である。また、式式においては微小要素の体積増加率 Δ (正確には、中央面の面積増加率) を、 $\Delta \ll 1$ として無視している。なお、残りの3成分 ϵ_{nn} 、 ϵ_{xn} 、 ϵ_{sn} は 0 である。

式(3)を変形し、中央面上のひずみ $\bar{\epsilon}_{xx}$ 、 $\bar{\epsilon}_{ss}$ 、 $\bar{\epsilon}_{xs}$ 、曲率 $\bar{\kappa}_{xx}$ 、 $\bar{\kappa}_{ss}$ 、ねじり率 $\bar{\kappa}_{xs}$ 等を用いて次式のように表わす。

$$\epsilon_{xx} = \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{\kappa}_{xx} n + \frac{1}{2} \bar{\kappa}_{xx} n^2, \quad \epsilon_{ss} = \bar{\epsilon}_{ss} + \bar{\kappa}_{ss} n + \frac{1}{2} \bar{\kappa}_{ss} n^2, \quad 2\epsilon_{xs} = \bar{\epsilon}_{xs} + 2\bar{\kappa}_{xs} n + \bar{\kappa}_{xs} n^2 \quad (4. a-c)$$

パイプ材は別として、通常骨組構造物では薄肉平板で構成される部材が用いられている。そこで、式(4)において $R = \infty$ とし、かつ薄板の条件より n を含む項は微小項と考えられるので、 $\bar{\kappa}_{ij}$ の変位に関する非線形項と

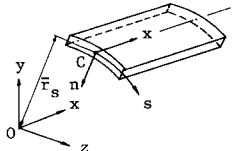


図-1 薄肉断面材

$\bar{p}_{ij}$ を省略する。これに、 $\bar{d}$ を $\bar{\delta}$ に座標変換したものを代入すると、 $e_{ss} = 0$ となる。残りの2成分は、

$$e_{xx} = u_0' - v_0'' \bar{y} - w_0' \bar{z} + \frac{1}{2} \{ (u_0')^2 + (v_0')^2 + (w_0')^2 \} - \frac{1}{2} (\phi_0 w_0'' - \phi_0' w_0' + 2u_0' v_0'') \bar{y} + \frac{1}{2} (\phi_0 v_0'' - \phi_0' v_0' - 2u_0' w_0'') \bar{z} + \frac{1}{2} (v_0')^2 \bar{y}^2 + \frac{1}{2} (w_0')^2 \bar{z}^2 + \frac{1}{2} (\phi_0')^2 (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) + v_0' w_0' \bar{y} \bar{z} + \{ v_0' \sin \beta - w_0' \cos \beta - \phi_0' (\bar{y} \cos \beta + \bar{z} \sin \beta) \} \bar{r} \quad (5)$$

$$2e_{xs} = \phi_0' \bar{r}_s + \frac{1}{2} (v_0' w_0' - v_0' w_0'') \bar{r}_s + \frac{1}{2} \phi_0 (w_0' \cos \beta - v_0' \sin \beta) - u_0' (v_0' \cos \beta + w_0' \sin \beta) - 2\phi_0' \bar{r} \quad (6)$$

u_0, v_0, w_0, ϕ_0 は点Oの変位とねじり角、 $\bar{r}_s$ は重心点から点Cにおける接線までの長さ、 β はx軸とy軸のなす角である。

3. 薄肉断面材の弾塑性有限変位解析

仮定③、④を用いれば、薄肉断面材に生じるひずみは2成分のみとなるので、これを $\epsilon, \gamma (-2e_{xs})$ で表わし、ベクトル ϵ とおく。また、断面に生じる応力度 σ 、 τ を σ で表わすと、これらの増分量には次式が成立する⁴⁾。

$$\Delta \sigma = D \Delta \epsilon \quad (7) \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & D_3 \\ D_3 & D_2 \end{bmatrix} \quad (8) \quad \left. \begin{aligned} D_1 &= E(1 - E\sigma/D_0), & D_3 &= E(1 - E\sigma/D_0), \\ D_2 &= G(1 - G\tau/D_0), & D_3 &= -3EG\sigma\tau/D_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

弾塑性状態においても、閉断面材ではせん断流は断面内において一定であると仮定する。この仮定から、 $\Delta \epsilon$ と $\Delta \gamma$ の板厚方向の変化は微小とみなして省略し、 $\Delta \gamma$ には線形項のみを用いることにする。せん断流の増分 Δq を考えて、式(7)の $\Delta \tau$ を閉断面内で一周積分すると次式が得られる。

$$\oint \Delta \tau ds = \Delta q \oint (ds/t) - \Delta \phi_0' \oint D_3 \bar{r}_s ds + \oint D_3 \Delta \epsilon ds \quad (10)$$

$\oint$ は断面内の塑性域についてのみ線積分することを表わす。式(10)から $\Delta \tau$ を求め、これを再び式(7)に代入すると、せん断ひずみの増分 $\Delta \gamma$ が得られる。断面内で分割された各要素のせん断ひずみ増分 $\Delta \gamma_i$ は、要素の板厚 t_i と分割幅 Δs_i を用いて次式のようになる。ただし、 $\bar{r}_s$ は断面内の全要素について集めるものとする。

$$\Delta \gamma_i = \frac{\sum_k (D_3 \bar{r}_s \Delta s)_k}{\sum_k (\Delta s/t)_k} \frac{\Delta \phi_0'}{(D_2 t)_i} + \frac{\sum_k (D_3 \Delta \epsilon \Delta s)_k}{\sum_k (\Delta s/t)_k} \frac{1}{(D_2 t)_i} - \left(\frac{D_3}{D_2} \Delta \epsilon \right)_i \quad (11)$$

閉断面材においては、弾塑性状態においてもせん断ひずみは板厚方向に三角形分布していることとみなすことができる⁵⁾。この仮定を用いれば、ひずみエネルギーを求めるとき、板厚方向にも積分する必要がある。

さて、重心点の変位 d_0 を部材端の変位 u で表わし²⁾、これを式(5)に代入して u に関して変分をとれば、変位増分 Δu の3次以上の項を省略して次式を得る。

$$\Delta E = b \cdot \Delta u + u^T [C] \Delta u + \frac{1}{2} \Delta u^T [C] \Delta u = a \cdot \Delta u + \frac{1}{2} \Delta u^T [C] \Delta u \quad (12)$$

a は材端変位を含む12次のベクトルであり、 C は部材の形状と x の座標に関する12次の対称行列である。この ΔE を式(11)に用いて $\Delta \epsilon$ をひずみエネルギーの増分式に代入すると、停留原理より剛性行列が求められる。また部材端力 f は、閉断面材と開断面材に対してそれぞれ次式で与えられる。

$$f = \int_0^L \left[\sum_k \{ (\sigma_k + \mu_k) \Delta A_k a_k \} \right] dx + \frac{1}{8} \int_0^L (\Sigma Q h^T) dx \quad (13)$$

$$f = \int_0^L \left[\sum_k \{ \sigma_k \Delta A_k a_k \} \right] dx + \int_0^L (\Sigma h^T) dx \quad (14)$$

μ_k, Q , Σ は x の関数であり、弾性域では $\mu_k = 0$ となる。本解析法では、図-2に示すように部材を軸方向にも分割するので、式(13)、(14)の積分は細要素内 ($\Delta s_k \times \Delta l_j$) で行なう。剛性行列も f と同じく細要素 (k, j) の剛性の総和で与えられる。

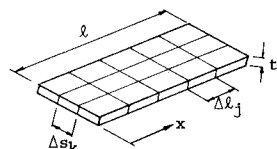


図-2 薄板の分割

4. 数値計算

図-3に示すような、大三島橋について計算を行った。部材総数は340部材で46種類の断面を使用し、1本のアーチリブを2000要素に分割した。詳細については省略するが⁶⁾、これと全く同一な部材配置を有する3体の模型について2回荷重を求めたが、実験値との差は1%以内であった。

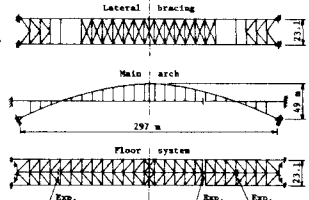


図-3 計算例(大三島橋)

1) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968. 2) 前田・林: 立体骨組構造の有限変位解析, 土木学会論文報告集, No. 253, 1976. 3) 前田・林・中村: 立体骨組構造の弾塑性有限変位解析, 第11回マテリアル構造解析法研究発表論文集, 1977. 4) 山田: 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座, II-2-A, 培風館, 1972. 5) 木村・鈴木: 薄肉矩形等断面材の弾塑性変形, 日本建築学会論文報告集, No. 166, 1969. 6) 前田・林・松井: 大三島橋の面外強度について, 本講演要集