I-96　平衡マトリックスを用いた幾何学的非線形解析

熊本大学工学部　正員　三池亮次
同上　正員　○小林一郎
同上　学生員　古賀充信

1. はじめに．筆者らは、さきに微小変形する任意軸形状の部材の剛性マトリックスを、平衡マトリックスを用いて簡潔に表示することの研究を進めて来たが、変位が有限であって無視できない場合には、平衡マトリックスおよび座標変換マトリックスは変位後の値に修正され、したがって剛性マトリックスも修正を受ける。

ここでは、変位は有限であるが、ひずみは微小であるような幾何学的非線形問題の解析を試みる。たわみ性マトリックスを修正し、その逆マトリックスとして剛性マトリックスを修正する方法である。

2. 基礎式の誘導．微小変形の場合の、平衡マトリックスを用いた構造解析の基礎式の誘導が、有限変形の場合に如何に修正して適用できるかについて検討しよう。

右手系直交座標系（x, y, z）で与えられる空間におかれた、任意の軸形状をもつ部材（i, j）の部材座標軸（ξ, η, ζ）を、部材軸の接線方向をξ軸とする右手系直交座標で表わすものとする。また、P，Mをおのおのの力およびモーメント，u, v, wを、それぞれx, y, z方向の変位，ϕを回転変位とする。力および変位のベクトルを$p=[P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z]^{(t)}$，$d=[u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z]^{(t)}$とする。添字$x, y, z$は各軸に対する成分を表わし、部材座標系に対しては$\bar{p}$，$\bar{d}$をもって表わし、添字を$\xi, \eta, \zeta$に代える。$i$端における断面力の部材および基準座標系における値を$\bar{P}_{iji}$，P_{iji}，j端の断面力を$\bar{P}_{ijj}$，P_{ijj}とする。また，i端を開放したときの（i, j）部材の中間荷重によるj端の断面力の，部材および基準座標系に対する値を，$\bar{P}_{Lijj}$，P_{Lijj}，j端を開放したときのi端の中間荷重による断面力を$\bar{P}_{Liji}$，P_{Liji}とする。

有限変形のために修正さるべき事項は，

（1）部材の平衡関係

変形後の平衡マトリックスH_{ij}に対して，平衡式

$$H_{ij} P_{iji} + P_{ijj} - P_{Lijj} = 0 \quad , \quad \bar{P}_{ijj} = \bar{H}_{ij} \bar{P}_{iji} + \bar{P}_{Lijj} \tag{1}$$

が成立する。上式で用いられる平衡マトリックスH_{ij}は変位dの関数である。したがって（i, j）部材のi端より部材軸に沿って長さsの点の分布荷重の基準および部材座標系に対する値をP_{Ls}，$\bar{P}_{Ls}$とするとき，式(1)のP_{Lijj}および$\bar{P}_{Lijj}$は変形後の修正された平衡マトリックスH_{sj}および$\bar{H}_{sj}$を用いて，次式

$$\int_i^j H_{sj} P_{Ls}\, ds + P_{Lijj} = 0 \quad , \quad \bar{P}_{Lijj} = -\int_i^j \bar{H}_{sj} \bar{P}_{Ls}\, ds \tag{2}$$

によって求めることができる。

（2）部材座標系より基準座標系への変換

座標変換マトリックスも，変形後の値T_{iji}を用いるべきで，部材座標系より基準座標系へ，それぞれ，

$$P_{iji} = -T_{iji} \bar{P}_{iji} \quad , \quad P_{ijj} = -T_{ijj} \bar{P}_{ijj} \quad , \quad P_{Lijj} = T_{ijj} \bar{P}_{Lijj} \tag{3}$$

のように変換される。

(3) 補仮想仕事の原理と基礎式の誘導

内部ひずみは微小であるが、変位が有限である場合に、変形後の位置において補仮想仕事の原理が適用されることは、弾性力学的に証明される。

(i,j) 部材の、i および j 端の断面力と変位をおのおの $(\overline{\mathbb{P}}_{iji}, \overline{d}_{iji})$, $(\overline{\mathbb{P}}_{ijj}, \overline{d}_{ijj})$ とする。$\overline{d}_{iji}$ および $\overline{d}_{ijj}$ は有限である。そのような変形に伴って生ずるひずみベクトル $\mathbb{e}_s$ は、ひずみが微小であるという前提にたつ場合、次のように表わされる。

$$\mathbb{e}_s = \mathbb{F}_e \overline{\mathbb{P}}_s + \mathbb{C}_t \tag{4}$$

ここに、$\mathbb{F}_e$ は部材断面のたわみ性マトリックス、$\mathbb{C}_t$ は温度変化によるひずみベクトル、$\mathbb{P}_s$ は断面力で、

$$\mathbb{F}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & & & & \\ & \frac{k_\eta}{GA} & & & \mathbb{O} & \\ & & \frac{k_\xi}{GA} & & & \\ & & & \frac{k_\xi}{GI_\xi} & & \\ & \mathbb{O} & & & \frac{1}{EI_\eta} & \\ & & & & & \frac{1}{EI_\xi} \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{C}_t = \begin{bmatrix} c\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c\alpha_\eta \\ c\alpha_\xi \end{bmatrix} \tag{5}$$

である。上式において、c は温度膨張係数、Δt, α は温度上昇量、温度勾配で、E はヤング率、G はせん断弾性係数、I は添字で示す方向の断面二次モーメント、k は変形係数である。

さて、有限の変形後の位置において、微小の仮想の断面力 $\delta\overline{\mathbb{P}}_{iji}$, $\delta\overline{\mathbb{P}}_{ijj}$ があって、微小の変位増分 $\delta\overline{d}_{iji}$, $\delta\overline{d}_{ijj}$ を生じ部材内部に断面力の増分 $\delta\overline{\mathbb{P}}_s$ を生じたものとすると、補仮想仕事の原理によって、

$$\delta\overline{\mathbb{P}}_{ijj}^{(t)}\overline{d}_{ijj} - \delta\overline{\mathbb{P}}_{iji}^{(t)}\overline{d}_{iji} = \int_i^j \delta\overline{\mathbb{P}}_s^{(t)}\mathbb{e}_s\,ds \tag{6}$$

積分は変形後の部材について行なう。式(1)を用いて

$$\overline{\mathbb{P}}_{ijj} = \mathbb{H}_{ij}\overline{\mathbb{P}}_{iji} + \overline{\mathbb{P}}_{Lijj}, \quad \overline{\mathbb{P}}_s = \mathbb{H}_{is}\overline{\mathbb{P}}_{iji} + \overline{\mathbb{P}}_{Liss}, \quad \delta\overline{\mathbb{P}}_{ijj} = \mathbb{H}_{ij}\delta\overline{\mathbb{P}}_{iji}, \quad \delta\overline{\mathbb{P}}_s = \mathbb{H}_{is}\delta\overline{\mathbb{P}}_{iji} \tag{7}$$

となるので、式(5)を、式(4)に、式(4)および式(7)を式(6)に代入して、

$$\overline{d}_{iji} = \overline{\mathbb{F}}_{ij}\overline{\mathbb{P}}_{iji} + \overline{d}_{Lijj} + \overline{\mathbb{H}}_{ij}^{(t)} d_{ijj} \tag{8}$$

ここに

$$\overline{\mathbb{F}}_{ij} = -\int_i^j (\overline{\mathbb{H}}_{is}^{(t)}\mathbb{F}_e\overline{\mathbb{H}}_{is})\,ds, \qquad \overline{d}_{Lijj} = -\int_i^j (\overline{\mathbb{H}}_{is}^{(t)}\mathbb{F}_e\overline{\mathbb{P}}_{Liss})\,ds - \int_i^j (\overline{\mathbb{H}}_{is}^{(t)}\mathbb{C}_t)\,ds \tag{9}$$

であり、有限要素法で用いられる表示に従い断面力の正の方向を定めれば、$\overline{\mathbb{K}} = \overline{\mathbb{F}}_{ij}$ として

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbb{P}}_{iji} \\ \overline{\mathbb{P}}_{ijj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{\mathbb{K}} & \overline{\mathbb{K}}\overline{\mathbb{H}}_{ij}^{(t)} \\ \overline{\mathbb{H}}_{ij}\overline{\mathbb{K}} & -\overline{\mathbb{H}}_{ij}\overline{\mathbb{K}}\overline{\mathbb{H}}_{ij}^{(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d}_{iji} \\ \overline{d}_{ijj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbb{K}}\overline{d}_{Liji} \\ -\overline{\mathbb{H}}_{ij}\overline{\mathbb{K}}\overline{d}_{Liji} + \overline{\mathbb{P}}_{Lijj} \end{bmatrix} \tag{10}$$

あるいは

$$\overline{\mathbb{P}}_{ij} = \overline{\mathbb{K}}_{ij}(\overline{d}_{ij})\cdot\overline{d}_{ij} + \overline{\mathbb{C}}_{ij} \tag{11}$$

と表わすことができる。部材端断面力と変位が $(\Delta\overline{\mathbb{P}}_{iji}, \Delta\overline{d}_{iji})$, $(\Delta\overline{\mathbb{P}}_{ijj}, \Delta\overline{d}_{ijj})$, 部材内部の断面力が $\Delta\overline{\mathbb{P}}_s$ だけ増加したとき、式(6)において増分 $\delta\overline{\mathbb{P}}_{ij}$ を定値とおいて、同様の演算を行なえば、次式を得る。

$$\overline{\mathbb{P}}_{ij} + \Delta\overline{\mathbb{P}}_{ij} = \overline{\mathbb{K}}_{ij}(\overline{d}_{ij} + \Delta\overline{d}_{ij})\cdot(\overline{d}_{ij} + \Delta\overline{d}_{ij}) + \overline{\mathbb{C}}'_{ij}$$

有限な回転変位の非ベクトル性を考慮し、荷重増分法と Newton-Raphson 法の混用法によって解を得る。