I-95　弾塑性・有限変位解析におけるサブスペース法の応用について

○ 京都大学工学部　正員　渡辺英一
京都大学工学部　正員　丹羽義次

1。はじめに　非線形問題の数値解析においては一般に多大の演算時間と記憶容量を要する。特に逆行列の多数回演算や非線形行列要素の作成においてそうであり、精度上にも問題がある。したがって適当な簡素化が必要である。筆者らは構造解析においてつぎのように二段階の簡素化を行っている。最初は構造要素の簡素モデル化であり、自由度の最初の逓限を行う。[1]（自由度 n）つぎの段階はこの n を更に大幅に逓限して m にすることであり一般化されたモード解析とでも呼ばれるものである。（ m≪n ）すなわち自由度 m のサブスペースに線形変換することである。このためには例えばBathe の開発した Subspace Iteration Method[2] 等により固有値解析を効率よく行いその際得られた n ×m の非エルミット固有関数行列を駆使して自由度 m の非線形解析に導かねばならない。本論文では（i）板構造の弾塑性曲げ（微小変位）、（i i）板構造の弾性後座屈・有限変位解析、(iii)板構造の弾塑性・有限変位解析への応用を述べてみたいと思う。

2. 基礎的関係諸式　有限要素法・差分法等の利用を想定し行列のシンボル的表示や添字記号を用いて、またdummy index の規約を用いれば以下の諸式が導かれる。

(i) ひずみー変位の関係　u_i、v_iをそれぞれ面内、外の変位とし、ひずみをベクトル的に記述すれば

$$d\varepsilon_i = B^{p}_{ik}du_k + B^{bb}_{ikl}(w_{ko} + \tfrac{1}{2}dw_k)dw_l + B^{b}_{ik}dw_k$$

ここに w_o は初期たわみである。

(ii) 構成式　降伏関数を $F = F(\sigma_j)$ とし、$F,_j = \partial F/\partial\sigma_j$ と書けば tangent modulus D^t は塑性理論によりつぎのように求められる。（H'をひずみ硬化の傾斜とする）

$$d\sigma_i = D^{t}_{ij}d\varepsilon_j \qquad \text{ここに}\quad D^{t}_{ij} = D^{e}_{ij} - D^{e}_{il}D^{e}_{jm}F,_l F,_m/(H' + D^{e}_{kn}F,_k F,_n)$$

iii) 荷重増分と変位増分　仮想変位の原理より以下のような n 次のglobal な釣合式が得られる

$$\begin{Bmatrix} \underline{dP}_{pi} \\ \underline{dP}_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\lambda_p\,\underline{q}_{pi} \\ d\lambda_b\,\underline{q}_{bi} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{K}^{p}_{ij} & \underline{K}^{pb}_{ikj}w_{ko} \\ \hline \underline{K}^{pb}_{jik}w_{ko} & \underline{K}^{b}_{ij} + \underline{K}^{bb}_{ijkl}\cdot w_{ko}w_{lo} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} d\underline{u}_j \\ d\underline{w}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{R}_{pi} \\ \underline{R}_{bi} \end{Bmatrix}$$

ただし $\underline{q}_p$, $\underline{q}_b$ はそれぞれ面内，外の荷重モードベクトルであり，λ_p, λ_b は荷重の大きさを示めす。

また

$$K^{p}_{ij} = \int_V D^{t}_{mn}B^{p}_{mi}B^{p}_{nj}dV \;;\quad K^{b}_{ij} = \int_V D^{t}_{mn}B^{b}_{mi}B^{b}_{nj}dV \;;\quad K^{pb}_{ijk} = \int_V D^{t}_{mn}B^{p}_{mi}B^{bb}_{njk}dV$$

$$K^{bb}_{ijkl} = \int_V D^{t}_{mn}B^{bb}_{mij}B^{bb}_{nkl}dV \;;\quad R_{pi} = P_{pio} - \int_V B^{p}_{mi}\sigma_{pmo}dV \;;\quad R_{bi} = P_{bio} - \int_V (B_{mi}\sigma_{bmo} + B_{mij}w_{jo}\sigma_{pmo})dV$$

ただし，添字「o 」は増分をとる前の初期値を、また R_{bi}, R_{pi} は前ステップでの不釣合力を、V は構造物の体積を示めす。

3. 板の弾塑性曲げ（微小変位）解析への応用[1]　前述の面外方向の釣合式より基礎式は

$\{dP_b\} = [K^b]\{dw\}$　このassociated Eigen V.P.：$[K^{b}_{el}]\{X\} = \lambda_b\{X\}$ の modal matrix を $[\Phi](n\times m)$ と置けばつぎのように n 元のベクトル $\{dw\}$ から m 元のベクトル $\{dv\}$に変換できる。

$\{dw\} = [\Phi]\{dv\}$　したがってn 元の釣合式はつぎのm 元の釣合式に変換される。

$$\boxed{[\tilde{K}_v]\{dv\} = [\Phi]^t\{dP_b\} = \{dP_v\}}$$

ここに $[\tilde{K}_v] = [\Phi]^t[K^b][\Phi] = \lceil \tilde{K}^{b}_{el} \rfloor - [\Phi]^t[B^b]^t([D^t] - [D^e])[B^b][\Phi]$

また $\lceil \tilde{K}^{b}_{el} \rfloor = [\Phi]^t[K^{b}_{el}][\Phi] = [\Phi]^t[\Phi]\lceil \Lambda_b \rfloor$

$[K^{b}_{el}]$ は弾性曲げ剛性行列であり $\lceil \Lambda_b \rfloor$ は associated Eigen V.P. の固有値をdiagonalにm 個並べたものである。この数値計算は発表当日スライドで示めすが、等分布荷重を受ける正方形板の場合は

まずm = 10までのsubspaceを考え、更にparticipation factorを評価すれば結局m = 3でよいことが判った。 また前式で明らかなように $[\tilde{K}_v]$ は塑性変形が進行するに従ってその非対角項を増大させて行くことが判る。

4. 板の後座屈・弾塑性有限変位の解析への応用 static condensationの手法をも用いる。 ここでは面内、外の変位をそれぞれのサブスペースにおけるものに変換する。 いまassociated Eigen V.P.としてつぎの問題を考える。

面内に対して $[K^p_{el}]\{X\} = \lambda_p\{X\}$ modal matrix を $[\Psi]$ とすれば

$$[\diagdown \tilde{K}^p_{el} \diagdown] = [\Psi]^t[K^p_{el}][\Psi] = [\Psi]^t[\Psi][\diagdown\Lambda_p\diagdown]$$

面外に対して $[K^b_{el}]\{Y\} = \lambda_b[K_G]\{Y\}$ modal matrix を $[\Phi]$ とすれば

$$[\diagdown\tilde{K}^b_{el}\diagdown] = [\Phi]^t[K^b_{el}][\Phi] = [\Phi]^t[K_G][\Phi][\diagdown\Lambda_b\diagdown] = [\diagdown\tilde{K}_G\diagdown][\diagdown\Lambda_b\diagdown]$$

ただし $[K_G]$ は幾何学的剛性行列であって次式により与えられる。

$[K_{Gjk}] = [K^{pb}_{ijk}][K^p_{el}]^{-1}\{q_{pi}\}$ また $[K^p_{el}]^{-1}$ は 面内固有値問題より簡単に得られる。 そこで線形座標変換をつぎのように行なう。

$$\{dw\} = [\Phi]\{dv\} \qquad \text{そして} \qquad \{du\} = [\Psi]\{dr\}$$

この結果，面内変位 $\{dr\}$ は 面外変位 $\{dv\}$ で次式のように表現できる。

$$\{dr\} = [\tilde{K}_{rr}]^{-1}(\{dP_r\} - [\tilde{K}_{rv}]\{dv\} - \{R_r\}); \quad [K_{rr}] = [\Psi]^t\ [K^P]\ [\Psi]$$

また $\{dv\}$ は最終的に次の釣合式より求めることができる。

$$\boxed{([\tilde{K}_{vv}] - [\tilde{K}_{vr}][K_{rr}]^{-1}[K_{rv}])\{dv\} = \{dP_v\} - [\tilde{K}_{vr}][K_{rr}]^{-1}\{dP_r\} - \{R_v\}}$$

ここに

$$[\tilde{K}_{vv}] = [\Phi]^t([K^b] + [K^{bb}_{ijkl}]\ w_{ko}w_{lo})[\Phi]; \quad [\tilde{K}_{rv}] = [\Psi]^t([K^{pb}_{ijk}]w_{ko})[\Psi]$$

$$[\tilde{K}_{vr}] = [\tilde{K}_{rv}]^t \quad ; \quad \{dP_r\} = [\Psi]^t\{dP_p\} \quad ; \quad \{dP_v\} = [\Phi]^t\{dP_b\}$$

$$\{R_r\} = [\Psi]^t\{R_p\} \quad ; \quad \{R_v\} = [\Phi]^t\{R_b\}$$

したがって逆行列を求めることは極めて容易なこととなる。 なお、狭義の意味での後座屈解析においては $\{dP_b\} \rightleftharpoons \{0\}$ であり、座屈直後では変位制御を行なえば良い。 subspace ではこのことは最小固有値に対応する $\{dv\}$ の成分を既知として与えることを意味する。

もし簡素な変位関数を用いるならば非線形行列の作成も高速で行なえるが、筆者らの研究している簡易要素法を用いれば効果的と思われる。 数値計算例は当日スライドで示めす。

5. 参考文献

1) 丹羽・渡辺・西込 構造解析の簡易化，省力化に関する基礎的研究 昭52 土木学会関西支部年次学術講演概要集 I－25.

2) Bathe,K.J.& E.L.Wilson. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall,INC., 1976.