I-94　弾塑性問題の積分方程式による数値的解法

京都大学大学院　学生員 ○仁木清貴
京都大学工学部　正　員　丹羽義次
京都大学工学部　正　員　福井卓雄

1.　まえがき

連続体に関して積分方程式の有効性はすでにいくつかの論文で述べられているが、本研究では、この手法を弾塑性問題に適用し、さらにそれを数値的に解くことにある。　弾性問題に対して積分方程式を適用した例は、多数あるのでその詳しい説明は省くが、その特徴を述べてみると次の5点になる。

(i)　物体力を考慮しないときは、対象とする物体内の要素分割を必要としない。

(ii)　境界上での変位，表面力の未知なものに対しての方程式を解けばよい。

(iii)　物体内部での変位，ひずみ，応力は、境界上での変位、表面力から求まる。

(iv)　(iii)の特徴があるので、変位，ひずみ，応力の詳細な分布を求めたければ任意に詳しく求められる。

(v)　(iv)を行なう際に，境界上での分割をやりなおす必要がない。

さて弾塑性問題に対しては後に示す式を見るとわかるように，増分形式で定式化され，さらに塑性ひずみ増分が物体力と同様な項として現われてくる。　このために塑性化しそうなところはあらかじめいくつかの部分に分け、それぞれの部分の特性を一点で代表させる。　しかしながら与えられた境界条件のもとで一度解を求めてしまうと，弾性問題と同様に (iv)，(v)のことが言える。　これが本解析法の特徴である。

2.　弾塑性問題の積分方程式による定式化

三次元空間内の物体に対して次のような仮定をおく。

(i)　物体は等方均質である。

(ii)　物体は弾性域ではフックの法則に，塑性化してからは流れ法則に従うものとする。

(iii)　変形は微少であり、かつ物体力は考えない。

(iv)　ひずみ増分は、弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分の和で表わされる。

(v)　ひずみ増分は、変位増分で一意的に表わせる。

このとき弾塑性流れに対するナビアーの式は次のようになる。

$$\dot{u}_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}\dot{u}_{j,ij}+(\bar{P}_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}^{p}_{kl})_{,j}=0 \qquad (1)$$

ここで　$\dot{u}_i$；変位増分　　$\dot{\varepsilon}^{p}_{kl}$；塑性ひずみ増分　　$\bar{P}_{ijkl}$；応力に依存する項　　ν；ポアソン比

すなわち塑性ひずみ増分は物体力と同じような働きを演じる。　このとき領域内の二点 $p(x_i)$，$q(y_i)$ に対して相反作用の定理を用いて　$\int_{D-D_0}\sigma^{*}_{ij}\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}\,dV=\int_{D-D_0}\varepsilon^{*}_{ij}\dot{\sigma}_{ij}\,dV$　となる。　ここで D は対象とする領域，D_0 は集中荷重作用点まわりの半径 ρ の球である。　この式を(iv)，(v)および基本特異解を用いて表わし，$\rho\to 0$ とすると次式を得る。　これが弾塑性問題に対する積分方程式である。

$$\dot{u}_k(p)+\int_{\partial D}T_{ki}(p,Q)\,\dot{u}_i(Q)\,dS_Q=\int_{\partial D}U_{ki}(p,Q)\,\dot{t}_i(Q)\,dS_Q+\int_{D}\Sigma_{kij}(p,q)\,\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}(q)\,dV_q \qquad (2)$$

本研究においては平面ひずみ問題を考えており、基本特異解 $U_{ki}(p,q)$ は次式のとおりである。

$$U_{ki}(p,q)=\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left[(-3+4\nu)\delta_{ki}\log r+r_{,k}r_{,i}\right] \qquad (3)$$

ここで　$r=r(p,q)=\sqrt{(x_i-y_i)(x_i-y_i)}$　　　$r_{,i}=\frac{\partial r}{\partial y_i}=\frac{y_i-x_i}{r}$ $\qquad (4)$

また　$\Sigma_{kij}(p,q)$ は

$$\Sigma_{kij}(p,q)=\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left[(1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,k}-\delta_{ik}r_{,j}-\delta_{jk}r_{,i})-2r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right] \qquad (5)$$

$$T_{ki}(p,q)=\Sigma_{kij}(p,q)\,n_j(q) \qquad (6)$$

(2)式はp点が物体内部にある時に成立する式であるが，p点が境界上にある時は次式となる。

$$\frac{1}{2}\dot{u}_k(P)+\int_{\partial D}T_{ki}(P,Q)\dot{u}_i(Q)dS_Q=\int_{\partial D}U_{ki}(P,Q)\dot{t}_i(Q)dS_Q+\int_D\Sigma_{kij}(P,\xi)\dot{\varepsilon}^p_{ij}\,dV_\xi \qquad (7)$$

引き続いて仮定(1)を用いて(2)式をひずみで定式化すると次のような式となる。

$$\dot{\varepsilon}_{kl}(p)+\int_{\partial D}\Lambda^i_{kl}(p,Q)\dot{u}_i(Q)dS_Q=\int_{\partial D}\Gamma^i_{kl}(p,Q)\dot{t}_i(Q)dS_Q+\int_D\Phi^{ij}_{kl}(p,\xi)\dot{\varepsilon}^p_{ij}(\xi)\,dV_\xi \qquad (8)$$

ただし $\Lambda^i_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}T_{li}+\frac{\partial}{\partial x_l}T_{ki}\right)$ 、 $\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}U_{ki}+\frac{\partial}{\partial x_k}U_{li}\right)$ 、 $\Phi^{ij}_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\Sigma_{kij}+\frac{\partial}{\partial x_k}\Sigma_{lij}\right)$ (9)

3. 数値解法

(7)式，(8)式を境界上でNヶ、領域内の塑性化しそうなところに対してMヶの部分に分ける。それぞれの部分で各変量は一定であると仮定する。これにより(7)式，(8)式はそれぞれ次のような連立一次方程式となる。

$$\left(\frac{1}{2}[I]+[A]\right)\{\dot{u}\}=[B]\{\dot{t}\}+[C]\{\dot{\varepsilon}^p\} \qquad (10)$$

$$\{\dot{\varepsilon}\}+[G]\{\dot{u}\}=[H]\{\dot{t}\}+[P]\{\dot{\varepsilon}^p\} \qquad (11)$$

ここで von Mises の降伏条件を仮定し、これから導びかれる流れ法則をひずみで表わすと次式となる。

$$\dot{\gamma}^p_{ij}=\frac{\tau_{ij}\tau_{mn}}{2\kappa^2\left(1+\frac{d}{d\lambda}\kappa\right)}\dot{\gamma}_{mn} \qquad (12)$$

$\dot{\gamma}^p_{ij}$; 偏差塑性ひずみ増分　$\dot{\gamma}_{ij}$; 偏差ひずみ増分　τ_{ij}; 偏差応力　κ; 加工硬化パラメーター

(12)式を用いて(11)式から$\{\dot{\varepsilon}\}$を消去したものを次式で表わす。

$$[D]\{\dot{u}\}=[E]\{\dot{t}\}+[F]\{\dot{\varepsilon}^p\} \qquad (13)$$

そこで、(10)式と(13)式を連立させて解くことにより解を求める。もちろん与えられた境界条件を満足するまで、くり返し計算を行なう。ここで考慮しておかなければならないのは$\{\dot{\varepsilon}^p\}$の影響係数[C]，[P]，および[F]である。これらは面積積分によって求められる（平面ひずみ問題を考えている）が，これを数値的に行なうには精度の点で問題があり，あらかじめ一方向に対して解析的に積分を行ない，対象とする面積要素の境界での線積分に変換しておくのである。そしてこの線積分に対して数値積分を行なう。この方法により解を求める。たとえば、今境界上で$\{\dot{t}\}$が規定されているとする。このとき(10)式を解いて（$\{\dot{\varepsilon}^p\}=\{0\}$）境界上での$\{\dot{u}\}$を求める。さらに(11)式を用いて領域内部での$\{\dot{\varepsilon}\}$を求める。（この時点で$\{\dot{t}\}$，$\{\dot{u}\}$は既知，$\{\dot{\varepsilon}^p\}=\{0\}$）求まった$\{\dot{\varepsilon}\}$を用いて領域内の各部分が降伏しているかどうかを判断し，降伏していれば$\{\dot{u}\}$，$\{\dot{\varepsilon}^p\}$を未知数とし，(10)式，(13)式を連立させて境界条件を満足するまで増分計算をくり返す。以上のような手順となる。境界上で$\{\dot{u}\}$が規定されている場合もまったく同様にして求められる。

4. あとがき

現在、無限体中に円柱状の無限の空洞をもつ物体の一様な押し広げの問題を解いており、この解析の結果、ならびに考察は当日とりまとめて発表する予定である。

5. 参考文献

1) J. L. Swedlow & T. A. Cruse, Formulation of Boundary Integral Equation For Three-Dimensional Elasto-Plastic Flow. Int. J. Solids Structures, 1971, vol 7, pp 1673-1683
2) P. M. NAGHDI & J. A. TRAPP, The Significance of Formulating Plasticity Theory with Reference to Loading Surfaces in Strain Space. Int. J. Engng Sci. 1975. vol 13 pp 785-797
3) 丹羽，小林，福井，積分方程式による空洞周辺の三次元応力解析，土木学会論文報告集（投稿中）
4) 丹羽，福井，仁木，弾塑性問題の積分方程式による解法．昭和52年度 土木学会関西支部学術講演概要集 Ⅰ-13