I-91　一次元構造要素の幾何学的非線形問題における支配方程式について

○東京大学　学生員　阿井　正博
東京大学　学生員　岩熊　哲夫
東京大学　正　員　西野　文雄

1. はじめに

最も多くの変形パラメータを含む一次元構造要素は軸力，捩れ，二軸曲げを受ける薄肉断面梁である。薄肉断面梁の大変形問題における支配方程式に、例へば面内問題であること，曲げ・捩り剛性がないこと等の条件を加えることにより，面内梁の一軸曲げやケーブル部材等の同等の支配方程式が導びかれるものと考えられる。この意味で，薄肉断面梁の支配方程式がいわゆる一次元構造要素の支配方程式を一般的に記述しているとする見方ができる。

2. 3次元曲線梁の大変形問題における支配方程式

梁を一次元化するために変形に関する仮定；i)断面は変形しない。ii)閉断面部では薄肉中心面内のせん断歪はないものとし，開断面部ではせん断流によるせん断歪を考える。iii)梁の軸方向に平行で中心面に直角な面内のせん断歪はない，を採用する。

梁の断面の重心点を長手方向に連続させた空間曲線を$\langle x_G(\zeta), y_G(\zeta), z_G(\zeta)\rangle$と表わす。ここに，$\langle x, y, z\rangle$は空間に定めた直交デカルト座標であり，$\zeta$は変形前のG-線の長さに沿って定めた埋込座標である。G-線の従法線，法線，接線方向の単位ベクトル$\{\hat{e}_G\}=\{\hat{e}_{G\tau}, \hat{e}_{G\kappa}, \hat{e}_{G\zeta}\}$は，空間座標の基ベクトル$\{\hat{e}\}=\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$と$\langle x_G(\zeta), y_G(\zeta), z_G(\zeta)\rangle$の$\zeta$に関する二階までの微係数で表わすことができ，その変換マトリックスを$\{\hat{e}_G\}=[T_G(\zeta)]\{\hat{e}\}$と表わすものとする。

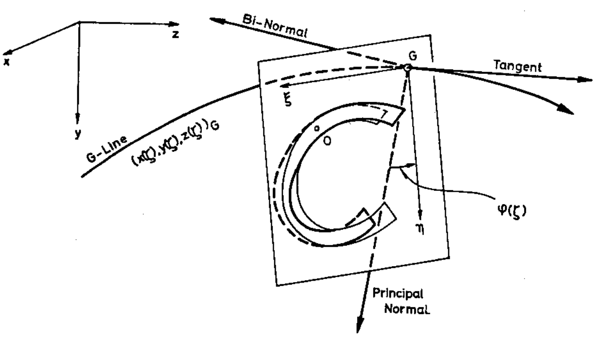

Fig.1 Kinematic Field

断面の主軸方向にξ，η軸をとり，$\hat{e}_{G\zeta}$を軸に$\hat{e}_{G\tau}$，$\hat{e}_{G\kappa}$を$\varphi(\zeta)$だけ回転させた単位ベクトルを$\{\hat{e}\}=\{\hat{e}_{G\xi}, \hat{e}_{G\eta}, \hat{e}_{G\zeta}\}=[T_\varphi]\{\hat{e}_G\}$とし，この$\{\hat{e}_{G\xi}, \hat{e}_{G\eta}\}$を$\langle \xi, \eta\rangle$に対する基ベクトルと考えることにより断面の回転自由度を導入するものとする。

以上において，仮定 ii), iii)；$\gamma_{s\zeta}^{*}=const./t$，$\gamma_{n\zeta}=0$（$s$：断面の中心線に沿う座標，$n$：中心線に法線方向の座標）を考えると，梁の断面寸法が長手方向の次元に比して十分小さいという条件のもとに，梁の物質点(s, n, ζ)の空間位置は

$$\mathbb{r}(s,n,\zeta) = \left(\langle x_G, y_G, z_G\rangle + \langle \xi, \eta, -(\varphi+\alpha_G)\omega\rangle [T_\varphi][T_G]\right)\{\hat{e}\} \quad (1)$$

と表わされ，曲線梁が一次元化される。ここに，α_GはG線の捩れ曲率であり，$\alpha_G=(1+\epsilon_G)/\tau_G$（$\epsilon_G$：G線の伸び率，$\tau_G$：G線の捩れ率半径）で与えられる。また，$\omega$は反り関数である。式(1)より得られる非零の梁の歪成分は，微小項を除いて

$$\epsilon_{\zeta\zeta} = [\![\epsilon_G]\!] - [\![\beta_G(\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi)]\!] - \omega[\![\varphi''+\alpha_G'']\!]$$
$$\epsilon_{s\zeta} = \frac{1}{2}\,Ⓗ\,[\![\varphi'+\alpha_G']\!] \qquad \text{-------}\ (2.a,b)$$

と表わされる。ここに，記号$[\![\ ]\!]$は，$[\![F]\!]=F-F_{initial}$を表わしており，β_GはG線の曲がり曲率であり，$\beta_G=(1+\epsilon_G)/\rho_G$（$\rho_G$：G線の曲率半径）で与えられる。式(2)を用いて，断面の合応力は

$$N = EA[\![\epsilon_G]\!]$$
$$T_s = GJ_s[\![\varphi'+\alpha_G']\!]$$
$$M_{(\xi)}\,(=-M_\eta) = -EI_{\xi\xi}[\![\beta_G\sin\varphi]\!] - EI_{\omega\xi}[\![\varphi''+\alpha_G'']\!]$$
$$M_{(\eta)}\,(=M_\xi) = -EI_{\eta\eta}[\![\beta_G\cos\varphi]\!] - EI_{\omega\eta}[\![\varphi''+\alpha_G'']\!]$$
$$M_\omega = -EI_{\omega\omega}[\![\varphi''+\alpha_G'']\!] - EI_{\omega\xi}[\![\beta_G\sin\varphi]\!]$$
$$\qquad -EI_{\omega\eta}[\![\beta_G\cos\varphi]\!] \qquad \text{-------}\ (3.a\sim e)$$

で表わされ，つり合い方程式は

$$\frac{d}{d\zeta}(\langle M\rangle[T_\varphi]\{e_G\}) + \langle \bar{m}\rangle\{e\} + (1+\epsilon_G)\, e_{G\zeta}\times\langle F\rangle\{e\} = 0$$

$$N = e_{G\zeta}\cdot\langle F\rangle\{e\} \quad ----(4.a,b)$$

と表わすことができる。ここに、$\langle M\rangle=\langle M_\zeta, M_\eta, M_\zeta\rangle$ ($M_\zeta = M'_\omega + T_s + \bar{m}_\omega$)は断面に作用するモーメントの$\{e\}$に関する成分であり、$\langle \bar{m}\rangle$は分布外力モーメント、$\langle F(\zeta)\rangle = \langle \bar{F}_0\rangle - \int_0^\zeta \langle p\rangle d\zeta$ ($\langle \bar{F}_0\rangle$: $\zeta=0$の断面に作用する力成分, $\langle p\rangle$: 分布外力)である。力学的境界条件は

$$\langle M\rangle[T_\varphi][T_G] = \langle \bar{M}\rangle$$
$$M_\omega = \langle \bar{M}_{\omega x}, \bar{M}_{\omega y}, \bar{M}_{\omega z}\rangle \frac{1}{1+\epsilon_G}\begin{Bmatrix} x'_G \\ y'_G \\ z'_G \end{Bmatrix}$$
$$\langle \bar{F}_\ell\rangle = \langle \bar{F}_0\rangle - \int_0^\ell \langle p\rangle d\zeta \quad ----(5.a\sim c)$$

で与えられ、幾何学的境界条件は

$$[T_\varphi][T_G]\{e\} = \{\bar{e}\}$$
$$(\varphi'+\alpha_G) = (\overline{\varphi'+\alpha_G})$$
$$W_G(\ell) - W_G(0) = (\overline{W_G(\ell)-W_G(0)}) \quad ----(6.a\sim c)$$

で与えられる。

3. 面内曲線梁の大変形問題

梁の断面形状は断面のη軸に関して対称であり、初期状態において図心線およびη軸はy-z面内にあるものとする。すべての与えられる物理量は、空間座標のy軸やη軸に関して対称であり、梁のx, φ方向の変位はy, z方向変位に影響することなく拘束されているものとする。

以上の条件のもとに、式(2)~(6)を展開すれば、
非零の歪成分:

$$\epsilon_{\zeta\zeta} = [\![\epsilon_G]\!] - \eta[\![\beta_G]\!] \quad ------(7)$$

合応力-歪関係:

$$N = EA[\![\epsilon_G]\!] \quad ----(8.a,b)$$
$$M\ (=M_{(\eta)}) = -EI_{\eta\eta}[\![\beta_G]\!]$$

つり合い式:

$$[T_G]^T\begin{Bmatrix} N \\ \frac{M'+\bar{m}}{1+\epsilon_G} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{z0} \\ \bar{F}_{y0} \end{Bmatrix} - \int_0^\zeta \begin{Bmatrix} p_z \\ p_y \end{Bmatrix} d\zeta \quad ---(9)$$

$$[T_G] = \frac{1}{1+\epsilon_G}\begin{bmatrix} z'_G, & y'_G \\ -y'_G, & z'_G \end{bmatrix} \quad ----(10)$$

力学的境界条件式:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{z\ell} \\ \bar{F}_{y\ell} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{z0} \\ \bar{F}_{y0} \end{Bmatrix} - \int_0^\ell \begin{Bmatrix} p_z \\ p_y \end{Bmatrix} d\zeta$$
$$M|_{\zeta=0,\ell} = \bar{M}_{0,\ell} \quad -----(11.a,b)$$

幾何学的境界条件式:

$$z_G|_{\zeta=0,\ell} = \bar{z}_{G0,\ell}$$
$$y_G|_{\zeta=0,\ell} = \bar{y}_{G0,\ell}$$
$$\tan^{-1}(y'_G/z'_G)|_{\zeta=0,\ell} = \bar{\theta}_{0,\ell} \quad ----(12.a\sim c)$$

が得られる。

4. テーブルの支配方程式

曲線梁の支配方程式において次のような極限過程を考える。すなわち、梁に作用する外力$\langle \bar{F}_0\rangle$, $\langle p\rangle$ およびEAを一定としたまま、断面寸法を限りなく0に近ずける極限過程を考える。その結果、外力としてのモーメント、倍モーメント、および $I_{\zeta\zeta}$, $I_{\eta\eta}$, $I_{\omega\zeta}$, $I_{\eta\omega}$, $I_{\omega\omega}$, J_sはそれぞれ力, 断面積に比して限りなく0に近ずく。極限過程の結果における曲線梁のつり合い形状において、式(3.a~e)に含まれる変形パラメータ ϵ_G, β_G, α_G, φ' 等が有限値に保たれるものとすると、軸力以外の断面の合応力は0となる。

式(4.a,b)において $\langle M\rangle\equiv 0$ とおくと、つり合い式は

$$e_{G\zeta}\times\langle F\rangle\{e\} = 0$$
$$N = e_{G\zeta}\cdot\langle F\rangle\{e\} \quad ------(13.a,b)$$

となる。上式を変形して成分表示にすると

$$\frac{N}{1+\epsilon_G}\begin{Bmatrix} x'_G \\ y'_G \\ z'_G \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{F}_x(\zeta) \\ \bar{F}_y(\zeta) \\ \bar{F}_z(\zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ----(14)$$

としてテーブル部材のつり合い方程式が得られる。式(5.a,b),(6.a,b)に対応する境界条件式は前述の極限過程において退化し

力学的境界条件:

$$\langle \bar{F}_\ell\rangle = \langle \bar{F}_0\rangle - \int_0^\ell \langle p\rangle d\zeta \quad ----(15)$$

幾何学的境界条件:

$$W_G(\ell) - W_G(0) = (\overline{W_G(\ell)-W_G(0)}) \quad ----(16)$$

のみが残る。