

防衛大学校 正会員 ○中村 弘

防衛大学校 学生員 石橋 勝重

防衛大学校 正会員 石川 信隆

1. 結言 従来、弾性限度を越えた変動繰返し荷重を受ける骨組構造物の変形硬化荷重解析に関する研究が数多くなされてきたが、その多くは変形硬化定理によるいわゆる一次変形硬化荷重を求めたものであり変形硬化荷重時における残留変形を考慮したいわゆる二次変形硬化荷重解析に関しては、わずかに Davies¹⁾の研究があるにすぎない。すなわち、構造形式あるいは載荷形式によって曲げの他に軸力が大きく作用する場合には軸力と残留変形とによる二次付加曲げモーメントの影響(以下二次的影響とよぶ)を無視できず、この影響が構造全体の耐力低下を招くことが指摘されている¹⁾。本研究は先に報告した曲げ構造物に対する残留変形解析法をさらに拡張して、曲げと軸力を同時に受ける平面骨組構造物の二次変形硬化荷重解析法を提示するもので、まず有限要素に基づくマトリックス解析法を用いて変形硬化荷重解析と残留変形解析の基本式を数値計画法の問題として誘導し、次いで二次的影響を繰返し算定することにより二次変形硬化荷重を求めるものである。

2. 変形硬化荷重解析の基本式 (1) 下界定理による基本式 変形硬化理論の下界定理によれば、『残留平衡条件と降伏条件を同時に満足する静的許容な変形硬化荷重係数 α_s の最大値が真の変形硬化荷重係数 α_s である』から、二次的影響を考慮した変形硬化荷重解析は、図-1のような線形化降伏条件を用いて次のLP問題として表わされる。

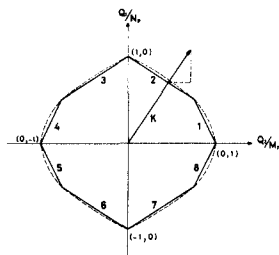


図-1 線形化降伏条件

Find: α_s, Q_R such that: $\alpha_s = \max. \alpha_s^*$ (1a)subject to: $C^T Q_R = e_s$ (1b): $N^T(\alpha_s Q_e + Q_R) \leq K$ (1c)

ここに、式(1b)は二次的影響を考慮した残留平衡条件式を、式(1c)は図-1の線

形化降伏条件において変動組合せ断面力 $Q = (\alpha_s Q_e + Q_R)$

が降伏線の外部に出ないことを示している。また、 Q_R = 残留断面力ベクトル； Q_e = 弾性包絡断面力ベクトル； e_s = 二次的影響による残留外力ベクトル(ただし、ここでは既知として取扱う)； N = 図-1の降伏線の外向き単位ベクトル； K = 組合せ塑性容量を示し、図-1の原点から降伏線までの距離ベクトル； C = 構造全体の変形適合マトリックス。

(2) 上界定理による基本式 式(1)にLPの双対定理を適用すれば、次のような上界定理による基本式がえられる。

Find: $\lambda, \dot{u}$ such that: $\alpha_s = \min. (K^T \lambda - e_s^T \dot{u})$ (2a)subject to: $N \lambda - C \dot{u} = 0$ (2b): $Q_e^T N \lambda = 1$ (2c): $\lambda \geq 0$ (2d)

ここに、式(2a)は組合せ塑性容量のなす内部仕事と二次的外力仕事の差が最小となることを示し、式(2b)は構造全体の新增崩壊機構条件を、式(2c)は弾性包絡断面力が単位の外力仕事をなすことを表わしている。また、 λ = 塑性乗数ベクトル； $\dot{u}$ = 仮定の節点変形ベクトル。よって、双対定理によ

り式(1)または式(2)のいずれかを用いれば、あべつの変数すなわち変形硬化荷重係数 α_s 、残留断面力 Q_R および新增崩壊機構を示す λ と $\dot{u}$ が求まることになる。

3. 残留応力および変形解析の基本式 (1) 残留応力解析

変形硬化荷重時において構造物は未だ安定であり弾性系として取扱うことができるので、補正エネルギー最小の原理²⁾を用うれば、真の残留応力分布が式(3)によって求められる。ここに、式(3)は

残留平衡条件(式(3b))と降伏条件(式(3c))を満足する応力分布のうち補正エネルギー(式(3a))を最小にするものが真の残留応力分布であるという変形硬化荷重時における補正エネルギー最小の原理を示している。ただし、 e_s = 構造全体の剛性マトリックス。(2) 残留変形解析 式(3)の線形制約条件式にLagrange乗数をかけ非制約の目的関数を作ったうえで、Kuhn-Tucker条件を適用すれば³⁾、次のような残留変形解析の基本式が導かれる。

Find: Q_R such that: $U = \min. \frac{1}{2} Q_R^T e_s^{-1} Q_R$ (3a)subject to: $C^T Q_R = e_s$ (3b): $N^T(\alpha_s Q_e + Q_R) \leq K$ (3c)

Find : λ_R, u_R

such that : $\Pi = \min. \{ \frac{1}{2} Q_R^T K^{-1} Q_R + (K^{-1} - Q_R^T \alpha_s N) \lambda_R - e_s^T u_R \}$ ----- (4a)

subject to : $N \lambda_R - C u_R + K^{-1} Q_R = 0$ ----- (4b)

: $\lambda_R \{ N^T (\alpha_s Q_R + Q_R) - K \} = 0$ ----- (4c)

ここに、式(4)は変形適合条件(式(4b))と塑性流れ条件(式(4c))を満足する残留変形分布のうち、ポテンシャルエネルギー(二次的

影響を含む)を最小(式(4a))にするものが真の残留変形分布であるという変形硬化荷重時におけるポテンシャルエネルギー最小の原理を示している。また、 λ_R = 各要素端における残留塑性変形ベクトル； u_R = 構造物の残留節変変形(回転角および変位)ベクトル。なお、式(4)で残留軸力 $Q_R = 0$ および $e_s = 0$ とした一次残留変形解析の結果は、先に報告した文献²⁾の結果に一致する。(3) 二次的影響 残留軸力 Q_R と式(4)からえられる残留節変変位 u_R とによって生ずる二次的付加曲げモーメントを要素長で除いたいわゆる残留外力は次式により求められる。

$$e_s = Q_R^T \cdot (u_R^d / L) \quad \text{----- (5)}$$

ただし、 u_R^d = Q_R と直角方向に生ずる変位ベクトル； L = 要素長。

4. 二次変形硬化荷重解析法 (i) まか載荷順序にしたがって弾性解析を行ない、弾性包絡断面力図を求める。(ii) 当初 $e_s = 0$ とし、一次変形硬化荷重解析および一次残留変形解析を行なう。(iii) 式(5)より残留外力 e_s を算定し、 e_s を考慮した二次変形硬化荷重解析および二次残留変形解析を行なって e_s が収斂したとき、真の二次変形硬化荷重係数 α_s が求められる。

5. 計算例 まず、本法の妥当性を立証するために図-2に示すような簡単なラーメン¹⁾について数値的検討を行なった。すなわち、載荷形式を(a) Type 1 と (b) Type 2 の二つの場合について考え、それぞれの載荷形式に対して軸力比 $p = Q_a / Q_L$ (Q_a = 柱の軸力、 Q_L = 柱を両端ピンとしたときのオイラー座屈荷重) をパラメータとして二次変形硬化荷重を図-3のように求めた。図-3より以下のことが考察される。(i) 既往の解¹⁾とかなりの精度で一致する。(ii) 軸力比 p が増大するにつれ耐力の勾配は Type 2 より Type 1 の方が急になり、これは Type 1 の場合に二次的影響が顕著に表われることを示している。

(iii) $p = 0.10$ の範囲内では Type 2 の方が Type 1 よりも耐力が低下しているが、これは Type 2 の弾性包絡断面力(比例荷重における外力に相当)が大きいことに起因している。なお、図-4に Type 1 および 2 ($p = 0.07$) のときの残留変形図を示し、一次解析と二次解析の相違を比較した。(ただし、図-4で括弧内の数字は一次解析値を示す。)

6. 結言 本法は曲げと軸力を受ける構造物のみならず、曲げと接りを受ける格子桁、二軸曲げと接りを受ける立体骨組構造物の二次変形硬化荷重解析にも応用でき、さらに変動繰返し荷重に対する二次最適塑性設計法にも拡張可能であると思われる。

参考文献

- 1) Davies, J.M.; Variable Repeated Loading and the Plastic Design of Structures, The Structural Engineer, Vol. 48, No. 5, May 1970.
- 2) 石川、興出、岡元；変動繰返し荷重を受ける骨組構造物の終局変形解析，土木学会第31回年次学術講演会講演概要集第1部，昭和51年10月。
- 3) Cohn, M.Z. & Rafay, T.; Ultimate Deformations of Plastic Frames Considering Axial Forces, ASCE-EM Speciality Conference, Univ. of Waterloo, May, 1976.

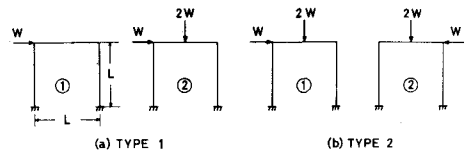


図-2 構造および載荷形式

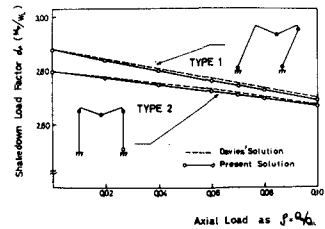


図-3 変形硬化荷重係数

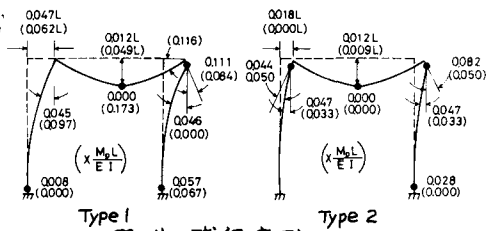


図-4 残留変形