I-72　　面内問題における有限要素法

信州大学　正員　谷本勉之助
学生員　○川畑幹雄

1. まえがき

本解析は、高次の多項式を形状関数として取り込むことにより、要素分割を少なくして高精度の解を得ようとするもので、一昨年度すでに当研究室で「高次項を考慮した面内応力の有限要素法」と題して、発表されている。これは、前回のものに改良を加えたものである。

2. 解析法

矩形要素の場合，三次の項まで取り込んだ変位マトリックス$\mathbb{U}$を次の多項式関数で仮定する。

$$\mathbb{U}=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy\end{bmatrix}\mathbb{X}+\begin{bmatrix}x^2 & y^2 & x^2y & xy^2 & x^3 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & y^2 & x^2y & xy^2 & x^3 & y^3\end{bmatrix}\mathbb{Y} \text{-------} (1)$$

要素節点では、式(1)で与えた$\mathbb{U}$が各節点変位と一致するため節点変位よりなる列ベクトル$\mathbb{U}^*$を使って式(2)の様に，また力量マトリックス$\mathbb{V}$は，応力・変位関係より求まり式(3)の様に表わせる。

$$\mathbb{U}=\mathbb{A}(x,y)\mathbb{U}^*+\mathbb{B}(x,y)\mathbb{Y} \text{-------}(2)\qquad \mathbb{V}=\{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\}=\mathbb{C}(x,y)\mathbb{U}^*+\mathbb{D}(x,y)\mathbb{Y} \text{-------}(3)$$

式(2)，(3)を使って要素のポテンシャルエネルギーを求め，最小ポテンシャルエネルギー原理より次式を得る。

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left\{\frac{1}{E}\left\lfloor\frac{\partial}{\partial c_i}(\sigma_x-\nu\sigma_y),\ \frac{\partial}{\partial c_i}(\sigma_y-\nu\sigma_x),\ 2(1+\nu)\frac{\partial}{\partial c_i}\tau_{xy}\right\rfloor\mathbb{V}-\frac{\partial}{\partial c_i}\lfloor u,v\rfloor\mathbb{K}\right\}dx\,dy=0 \text{-------}(4)$$

ただし，c_iは未定常数マトリックス$\mathbb{Y}$の要素である。　式(4)を整理すると次式を得る。

$$[\alpha]\mathbb{U}^*+[\beta]\mathbb{Y}+[\gamma]\mathbb{K}=0 \text{-------} (5)$$

ここで，$[\alpha]$,$[\beta]$,$[\gamma]$マトリックスは，それぞれ(12×8)，(12×12)，(12×2)の行列で，各要素固有の係数マトリックスである。　式(5)より$\mathbb{Y}$を求め，式(2)，(3)に代入すると，次の様な出発方程式を得る。

$$\mathbb{U}=\mathbb{P}(x,y)\mathbb{U}^*+\mathbb{P}'(x,y)\mathbb{K} \text{-------} (6)\qquad \mathbb{V}=\mathbb{Q}(x,y)\mathbb{U}^*+\mathbb{Q}'(x,y)\mathbb{K} \text{-------}(7)$$

次に，式(7)より局所座標系におけるKey Equationを得，各節点の近傍で力量を積分し，それを全体座標に射影する。　射影子を$\mathbb{R}^i$，全体座標系の力量を$\mathbb{W}^i$とすると，Segment Key Equationは，次の様になる。

$$\mathbb{W}^i=\mathbb{R}^i\mathbb{V}^i=\lfloor\lambda,\ \mu,\ \nu,\ 0\rfloor^i\mathbb{U}^*+\rho^i\mathbb{K}\qquad (i=1,2,3,4) \text{-------} (8)$$

従って，任意節点での力釣り合いは，次式で表わされる。　ただし，$\mathbb{P}$は外力マトリックスである。

$$\sum_{i=1}^{4}\mathbb{W}^i+\mathbb{P}=0 \text{-------} (9)$$

全節点での釣り合い方程式を組み上げると，完全変位三軸マトリックス方程式が得られる。

3. あとがき

この方法は、任意四辺形要素及び三角形要素に対しても同様に処理することができる。　また，漸化変形法とこの手法により容量の小さな電子計算機においても有限要素解析が可能となる。　尚，数値計算結果は，講演会当日発表の予定である。

（参考文献）　谷本，夏目，長谷「高次項を考慮した面内応力の有限要素法」土木学会才30回年次学術講演会概要集