I-69 有限要素近似の整合性について

中央大学 正会員 中澤晶平 同 川原睦人

複雑な形状の構造物の解析などに用いられる有限要素近似の性質について，要素分割が一様ではない場合の解の精度，安定性などに着目する。解の事後評価の指標として，要素分割の“まともさ”の尺度としてのエネルギーノルムの意味での整合性を導入する。既に，若干の数値実験の結果よりは，数値的に求められる解の性質が，解くべき微分方程式の性質のみならず，境界条件を含めた問題の性質に強く依存することが明らかにされている。[1)] ここでは，問題を線形自己随伴楕円型の偏微分方程式に対する第一種境界値問題に限定しておく。

Ω を R^m の滑らかな境界 $\partial\Omega$ を有する有界領域とおく。Ω に対する有限要素メッシュ $\hat{\Omega}$ を要素 Ω_e ($e=1,\dots,N$) の集合として

(1) $$\Omega \simeq \hat{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N} \Omega_e \quad ; \quad \Omega_e \cap \Omega_f = \phi \qquad \text{if } e \neq f$$

とおく。Ω 上で方程式

(2) $$\mathcal{L} u = f \qquad \text{ただし} \quad \mathcal{L} \equiv -\Delta = -\sum_{i=1}^{m} (\partial^2/\partial x_i^2)$$

を境界条件 $u = u_0$ on $\partial\Omega$ とともに解いてゆく。

(2)に対する変分問題は

(3) $$I(u) = a(u,u) - 2(f,u)$$

ただし
$$a(u,u) = \iint \sum_{j}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega$$

このとき，$\hat{\Omega}$ における近似解を u_h とおけば明らかに，誤差のエネルギーに対して次の定理が成立する。[2)]

(4) $$a(u-u_h, u-u_h) = a(u,u) - a(u_h, u_h)$$

すなわち，問題は，形状関数及び節点数が与えられた系に対する近似解 u_h に対して定められたエネルギーの最大となるような節点の配置を見出すこと，また，節点の配置が与えられたときの近似解のエネルギーの最大値よりのずれを評価することである。

問題の性質を明らかにするために以下では1次元の例題を用いてゆく。区間 $(0,1)$ で f が一定かつ u が両端で0となるとき，次の方程式で区分的に1次の形状関数を持つ有限要素近似を考える。

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f \qquad x \in (0,1) \qquad u(0) = u(1) = 0$$

厳密解は $-u = \frac{1}{2} f x (x-1)$ となる。(4)式は各要素内でもそれぞれ成り立つものとしてよいことより誤差評価の指標として次のエネルギー内積を用いる。

(5) $$a(u-u_h, u-u_h) = a(u,u) - u_h^2\, a(\varphi_h, \varphi_h)$$

ここで，u_h は有限要素解の節点値，φ_h は形状関数を示す。第1図には，厳密解とともに有限要素法による数値解の例を2要素分割の場合に対して示した。第2図には(5)により計算された誤差のエネルギーの領域全体での分布を示す。ただし簡単のため $f \equiv 1$ とおいた場合の結果を示した。

このような例題では，直観的に最も“まともな”分割である，中央に節点を設けたモデルに対して誤差が最小になる。また，同じ自由度でも節点の位置の移動のみで誤差を減少できることが明らかに示された。

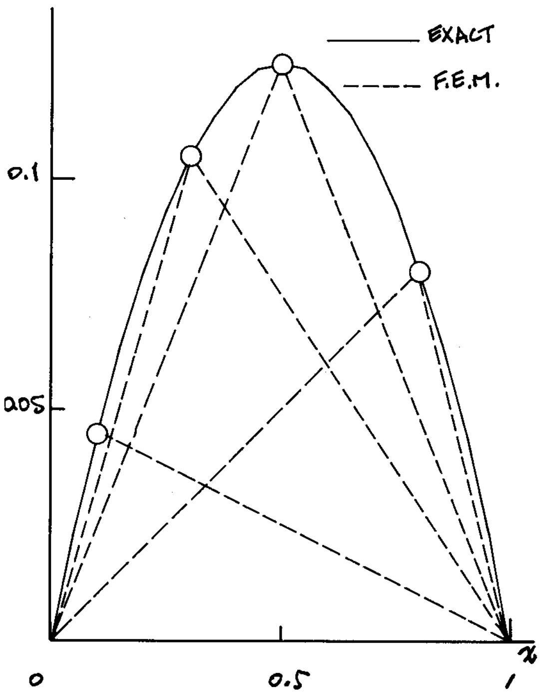

Fig.1 Exact Solution and Finite Element Approximation

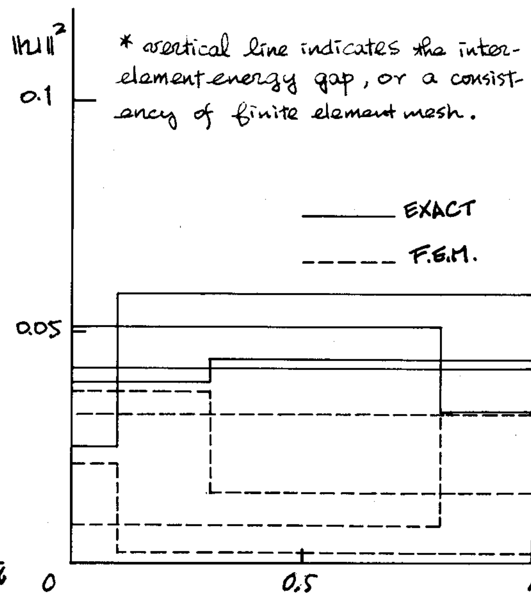

Fig.2 Computed Energy Distribution

以上の結果より，連続系の有限要素近似が最適であるとき，最良の数値解が得られることが予測される。すなわち，実用的には，近似解が得られたときに，同時にエネルギー内積にもとづくノルムを計算して解の事後評価が正しく行なわれることが重要である。

$h \to 0$ の極限で，各要素上で求められるエネルギーは常に等しいことは自明である。また，Fig.2 の結果より"最良の数値解を与える連続系の有限要素近似に対しては，各要素上のエネルギーは常に等しい"と考えられよう。この定理を正しいものとするとき，有限要素近似の整合性を，要素境界を共有する2つの要素間の差分商で与えるならば，すなわち，整合性 γ に対して，要素境界 $\partial\Omega_{ef}$ 上で，

$$\gamma_{ef} = (\|u\|_e - \|u\|_f)$$

としておけば，$\hat{\Omega}$ で γ_{ef} が最小となれば，よいメッシュであると評価できる。また，γ_{ef} が大きいとき，$\hat{\Omega}$ に対する数値解は安定を失なうことは容易に確かめられる。

以上で，有限要素解の評価の指標として各要素境界上で生ずるエネルギーのギャップを整合の条件として用いられることの概略を示した。従来の誤差評価の方法に比べて，本法では，不等要素分割を用いた場合に生ずる解の不安定性の解消に対する具体的な方針が立てられる，また，境界条件の解に及ぼす影響を平均自乗の意味で評価式の中に取り込んでいる，などの特徴があり，その実用性は高いものと考えられる。

今后，第2種境界条件を含む问題など，工学的に更に重要な问題に対する本評価法の適切さについて実験的に検証してゆく。また，固有値问題などに対しても本法により数値解の精度が向上することが知られており，これらを含めた，上記の定理の証明が試みられている。

1) 中沢，上田，藤谷；第11回マトリックス解析法シンポジウム論文集，pp431-436 (1977)
2) G. Strang & J. Fix "An Analysis of Finite Element Method" (1973)