

法政大学 正真 大地 幸三

1. まえがき

有限要素法の基本である各要素の剛性行列の作り方には、変位を仮定する方法、応力を仮定する Hybrid 法、Mixed 法等がある。この内応力を仮定する Hybrid 法は、T.H.H. Pian によって提案され、R.T. Seven 及 P.R. Taylor, R.J. Allwood 及 G.M.M. Cornes, R.D. Cook 等によってその優劣性が確証されているにもかかわらず、要素の剛性行列を作るまでの計算が厄介なため、実用に使われることが少ないようである。一方変位を仮定する方法は、多くの学者によって研究改良され、現在では曲辺要素の剛性行列まで作ることもできるようになっている。そこで応力を仮定する Hybrid 法を曲辺要素にまで拡張し、変位を仮定した場合の曲辺要素と比較し、両者の優劣を検討することを目的とした。

2. 応力を仮定する Hybrid 法

あとの説明に必要なので、応力を仮定する Hybrid 法の原理を簡単に説明しておく。補足エネルギーに応力指定の境界で $f_0 = 0, \sigma = f_0$ なる条件をつけ加えて式(1)の変分を取ると式(2)になる。

$$-\frac{1}{2} \int \sigma^T \sigma dV + \int f_0^T u dS_n + \int u^T (f_0 - f) dS_n \dots (1) \quad (-\int \sigma^T \sigma dV + \int \sigma^T \epsilon dV) + (\int \sigma^T \epsilon dV - \int \sigma^T f_0 dV) = 0 \dots (2)$$

ここで応力を $\sigma = P\beta + \pi$ と仮定する。この仮定された応力は要素内に適合条件式を満足するものでなければならぬ。 P は未定定数のベクトル、 π は座標の関数を要素に与える行列、 π は適合条件式の解である。また要素の境界の変位 u とは独立に、連続した変位 $u_1 \sim u_n$ を与えて並べたベクトル U と、座標の関数を要素に与える行列 L の積として $u = LU$ と仮定する。これらの仮定を式(2)に代入すると

$$\delta \beta^T (-\frac{1}{2} P^T P - \frac{1}{2} \pi^T \pi) + \delta \beta^T (\pi^T P + f_0 - f) = 0 \dots (3)$$

が得られ、前のかつこ内と 0 とした式から $\beta = H U - \frac{1}{2} P^T f_0$, これを後のかつこ 0 とおいた式に代入すると次の基本式が得られる。

$$f = H^T H U + f_0 \dots (4)$$

$$\text{ただし、式を簡単にするために } H \equiv \int P^T D^{-1} P dV, \quad \pi \equiv \int P^T \epsilon dV \dots (5)$$

とおいた。なお $f_0 \equiv \int L^T \sigma dS - \int L^T f_0 dS_n$, $f_2 \equiv \int P^T \sigma dV$, $f_1 = f_0 - \pi^T H^{-1} f_2$ であるがこれは今回の議論には必要がない。

3. 曲辺を持つプレート要素

要素の剛性行列は、式(4)の $H^T H$ であるから、式(5)を参照しなから、 H と π の計算は簡単である。

図1(a)に示す基準要素内の物理量 ϕ を周辺に配置した連続点の中の値 ($\phi_1 \sim \phi_n$) を用いて、次のように表わすことにする。

$$\phi = g_1(3, \eta) \phi_1 + g_2(3, \eta) \phi_2 + \dots + g_n(3, \eta) \phi_n \dots (6)$$

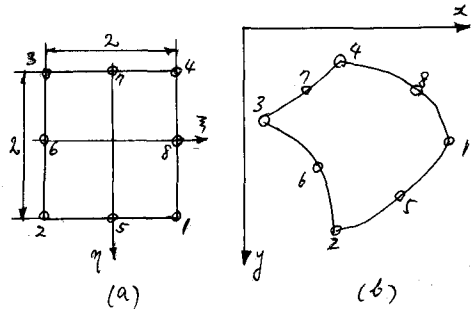


図 1

式(6)の $g_1(z, \eta) \sim g_n(z, \eta)$ は 2 次元の補間函数 (shape function) である。これらを用いると、図 1(6) の曲辺要素内の任意の一辺の座標 (x, y) は、周辺の接統互の座標 $(x_1, y_1) \sim (x_n, y_n)$ を用いて、次のように与えられる。
 $x = g_1(z, \eta)x_1 + g_2(z, \eta)x_2 + \dots + g_n(z, \eta)x_n$, $y = g_1(z, \eta)y_1 + g_2(z, \eta)y_2 + \dots + g_n(z, \eta)y_n$ ----- (7)

一方、プレートの変形条件式で右辺を 0 とおいた同次式を満足する応力として式(8)を仮定する。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 & y^2 & 0 & x^2 & 2xy & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & x^2 & y^2 & 0 & 2xy \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -y & -x & 0 & 0 & -2xy & -y^2 & -x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{12} \end{bmatrix} \text{ --- (8)}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \text{ --- (9)}$$

式(8)の右辺の 3×12 の行列が P である。これと式(9)の D^{-1} を用いて式(5)の HU 行列を計算すればよい。この計算にあたって、 P の要素に含まれる x, y に式(7)を用いることはすると

$$H = \int_0^1 \int_0^1 P^T(x, y) D^{-1} P(x, y) dV = \int_0^1 \int_0^1 P^T(z, \eta) D^{-1} P(z, \eta) |J| dz d\eta \text{ --- (10)}$$

となる。ただし $|J|$ はヤコビの行列である。上式の最後の積分の値をガウスの数値積分式で求めればよい。

次に H 行列があるが、式(5)の 2 次式は要素の周辺に与えた積分であり、 $f_0 = CP\beta$ は要素内の応力を式(8)のように仮定したとき周辺に現れた応力、 C は周辺に与えた外向きの法線の方向余弦を n_x, n_y ($=dx/ds, -dy/ds$) とするととき下の左の形をした行列、また L は要素の周辺の単位長一次元の補間函数 $g_1(\alpha) \sim g_n(\alpha)$ を用いて下の右のように仮定したとき、右辺に与えられた 2×2n の行列である。

$$C = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & -n_x \end{bmatrix} \text{ --- (11)}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\alpha) & 0 & g_2(\alpha) & 0 & \dots & g_n(\alpha) & 0 \\ 0 & g_1(\alpha) & 0 & g_2(\alpha) & \dots & 0 & g_n(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ --- (12)}$$

周辺積分を各辺毎の積分に分割し、それぞれの変位を構成する曲線の方程式と補間函数 α_{ij} を用いて $x = x(\alpha_{ij})$, $y = y(\alpha_{ij})$ とすると

$$T = \int_1^4 P^T C^T L \frac{d\alpha}{d\alpha_{12}} d\alpha_{12} + \int_1^4 P^T C^T L \frac{d\alpha}{d\alpha_{23}} d\alpha_{23} + \int_1^4 P^T C^T L \frac{d\alpha}{d\alpha_{34}} d\alpha_{34} + \int_1^4 P^T C^T L \frac{d\alpha}{d\alpha_{41}} d\alpha_{41} \text{ --- (13)}$$

さらに、図 1(a) を参照すると、辺 12, 23, 34, 41 の方程式は、積分の向きを考慮すると、式(7)の (z, η) を $(-3, 1), (-1, -\eta), (3, -1), (1, \eta)$ とおいたものであり、また式(13)の α_{ij} はそれぞれ $\alpha_{12} = z, \alpha_{23} = -\eta, \alpha_{34} = z, \alpha_{41} = \eta$ であるから、 HU 行列は定数で計算される。

$$T = \int_1^4 P^T(z, 1) C^T L \frac{dz}{d\alpha_3} d\alpha_3 + \int_1^4 P^T(-1, -\eta) C^T L \frac{d\eta}{d\alpha_2} d\eta + \int_1^4 P^T(3, -1) C^T L \frac{dz}{d\alpha_3} d\alpha_3 + \int_1^4 P^T(1, \eta) C^T L \frac{d\eta}{d\alpha_2} d\eta \text{ --- (14)}$$

ただし、 H 行列に含まれる n_x, n_y は、 $\frac{dx}{d\alpha_3}/\frac{d\alpha_3}{d\alpha_3}$, $\frac{dy}{d\alpha_2}/\frac{d\alpha_2}{d\alpha_2}$ または $\frac{dx}{d\eta}/\frac{d\eta}{d\eta}$, $-\frac{dy}{d\alpha_3}/\frac{d\alpha_3}{d\alpha_3}$ で計算する。

4. 計算結果

図 2, 3 に本文による計算結果 ($SP, 7\beta$) と変位を仮定する isoparametric 要素 (40×) の比較が示されている。いずれも 4 角形 4 接統互要素であり、 SP は式(5)の β の数をよから 5 個取ったもの、 7β は同じく 7 個取ったものである。この図から応力ではよく解が得られるが、 σ_y では、および x, y 方向の変位をプロットした図全体を総合して判断すると、周辺が直線のとみに確認されている Hybrid の優位性は周辺が曲線に与えたときにもあてはまるようである。なお、Slab 要素については、次の機会に発表する。

