I-64　Lagrange Multipliers を用いた3次元連続体の解析

センチュリリサーチセンタ（株）　正員　渡辺　隆之
〃　　武田　洋
東京大学　　矢川　元基

1. はじめに

今日、配管系の局部的な非弾性挙動を解析することは、原子力施設などにおいて重要な問題となっている。このような配管系において曲管部やT結合部などでは、局部的な応力集中を生じ詳細な解析が安全性の上から必要となる。過去における配管系の解析では、梁理論に基づいた解析が一般に行なわれてきた。これに対して Hibbitt 他[1] は、シェル理論に基づいた特殊な曲管要素と梁理論に基づいた直管要素を用いて配管系全体の非弾性解析を行っている。本論文では、立体要素と直管要素を結びつける体積を持たない結合要素を開発したので報告するとともに簡単な直管モデルの解析例を示す。また段付直管の弾塑性解析結果と実験結果との比較例も示す。

2. 支配方程式と変分原理

図1に示すように領域 V を仮想的に部分領域 $V^{(1)}$ と $V^{(2)}$ に分割する。このとき2つの領域における物理量は、仮想境界面 $S^{(12)}$ 上で連続であるとする。このとき基礎方程式は、増分形で次のように表わせる。

$$[D]^{(\alpha)}\Delta\{\sigma\}^{(\alpha)} + \Delta\{\bar{P}\}^{(\alpha)} = \{0\} \quad \text{in } V^{(\alpha)} \qquad (1)$$

$$\Delta\{\varepsilon\}^{(\alpha)} = ([D]^{(\alpha)})^T \Delta\{u\}^{(\alpha)} \quad \text{in } V^{(\alpha)} \qquad (2)$$

$$\Delta\{\sigma\}^{(\alpha)} = [E^{ep}]^{(\alpha)}\Delta\{\varepsilon\}^{(\alpha)} \quad \text{in } V^{(\alpha)} \qquad (3)$$

ここで、$\sum_\alpha V^{(\alpha)} = V$ であり (α), $\alpha = 1, 2$ は、仮想領域を表わす。$[D]$ は、微分演算子で微小変位理論に基づいている。$\{\sigma\}$ と $\{\varepsilon\}$ は、応力とひずみテンソルの列マトリックスで $[E^{ep}]$ は、応力−ひずみを関係づける弾塑性マトリックスである。さらに $\{\bar{P}\}$ と $\{u\}$ は、既定した物体力と変位の列マトリックスである。境界条件としては、次のものが考えられる。

$$\Delta\{u\}^{(\alpha)} = \Delta\{\bar{u}\}^{(\alpha)} \quad \text{on } S_u^{(\alpha)} \qquad (4)$$

$$\Delta\{T\}^{(\alpha)} = \Delta\{\bar{T}\}^{(\alpha)} \quad \text{on } S_\sigma^{(\alpha)} \qquad (5)$$

$$\Delta\{\overset{*}{u}\}^{(1)} = \Delta\{\overset{*}{u}\}^{(2)} \quad \text{on } S^{(12)} \qquad (6)$$

$$\Delta\{T\}^{(1)} + \Delta\{T\}^{(2)} = \{0\} \quad \text{on } S^{(12)} \qquad (7)$$

ここで $\{T\}$ と $\{\overset{*}{u}\}$ は、境界面 $S^{(12)}$ 上の表面力と変位の列マトリックスであるとする。これより付帯条件式(6)を Lagrange Multipliers $\{\lambda\}$ を用いて変分式に導入する。従って仮想仕事の原理は、(1), (5)と(6) 式から次のように表わせる。ここで $\{\lambda\}$ は、物理的には、表面力と

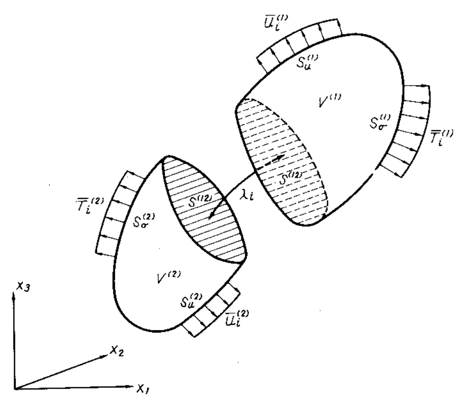

図1. 問題の定義

$$\sum_\alpha\Big[\int_{V^{(\alpha)}}(\delta\{\varepsilon\}^{(\alpha)})^T\Delta\{\sigma\}^{(\alpha)}dV - \int_{V^{(\alpha)}}(\delta\{u\}^{(\alpha)})^T\Delta\{\bar{P}\}^{(\alpha)}dV - \int_{S_\sigma^{(\alpha)}}(\delta\{u\}^{(\alpha)})^T\Delta\{\bar{T}\}^{(\alpha)}dS\Big] - \int_{S^{(12)}}\delta\{\lambda\}^T(\Delta\{\overset{*}{u}\}^{(1)} - \Delta\{\overset{*}{u}\}^{(2)})dS$$

$$- \int_{S^{(12)}}\delta(\{\overset{*}{u}\}^{(1)} - \{\overset{*}{u}\}^{(2)})^T\Delta\{\lambda\}\,dS = 0 \qquad (8)$$

等価である。よって(8)式は、(6) 式の連続条件を緩和した変分式となっている。

3. 有限要素法による定式化

有限要素法による定式化では、まず要素内の変位を次のように仮定する。

$$\Delta\{u\}^{(\alpha)} = [\phi]^{(\alpha)}\Delta\{\hat{u}\}^{(\alpha)} \quad \text{in } V^{(\alpha)} \qquad (9)$$

$$\Delta\{\overset{*}{u}\}^{(\alpha)} = [\overset{*}{\phi}]^{(\alpha)}\Delta\{\hat{u}\}^{(\alpha)} \quad \text{on } S^{(12)} \qquad (10)$$

ここで $[\phi]^{(\alpha)}$ と $[\overset{*}{\phi}]^{(\alpha)}$ は、補間関数であり $\{\hat{u}\}^{(\alpha)}$ は、節点変位である。$S^{(12)}$ 上の Lagrange Multipliers は

次のように表わせる。[3]

$$\Delta\{\lambda\} = [\overset{*}{\Phi}]\,\Delta\{\hat{\lambda}\} \qquad on\ S^{(12)} \quad (11)$$

平衡方程式は、(9)〜(11)式を(8)式に代入し $\delta\{\hat{u}\}^{(\alpha)}$ と $\delta\{\hat{\lambda}\}$ の任意性から次のように得られる。[2]

$$\begin{bmatrix} [K]^{(1)} & [0] & [\overset{*}{K}]^{(1)} \\ & [K]^{(2)} & [\overset{*}{K}]^{(2)} \\ Sym. & & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\{\hat{u}\}^{(1)} \\ \Delta\{\hat{u}\}^{(2)} \\ \Delta\{\hat{\lambda}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\{\hat{P}\}^{(1)} \\ \Delta\{\hat{P}\}^{(2)} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで、部分マトリックスは次のとおりである($\alpha=1,2$)。

$$[K]^{(\alpha)} = \int_{V^{(\alpha)}} ([B]^{(\alpha)})^T [E^{ep}]^{(\alpha)} [B]^{(\alpha)}\, dV$$

$$[\overset{*}{K}]^{(\alpha)} = Sgn\left[\int_{S^{(12)}} ([\hat{\Phi}]^{(\alpha)})^T [\overset{*}{\Phi}]\, dS\right], \quad Sgn = \begin{cases} - & : \alpha = 1 \\ + & : \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\Delta\{\hat{P}\}^{(\alpha)} = \int_{V^{(\alpha)}} ([\Phi]^{(\alpha)})^T \Delta\{\bar{F}\}^{(\alpha)} dV + \int_{S_\sigma^{(\alpha)}} ([\Phi]^{(\alpha)})^T \Delta\{\bar{T}\}^{(\alpha)} dS$$

4. 結合要素

8節点立体要素と梁要素を結びつける結合要素(図2)について説明する。(10)式は、次のように表わす。

$$\Delta\{\overset{*}{u}\}^{(\alpha)} = \Delta(\lfloor \overset{*}{u}_1, \overset{*}{u}_2, \overset{*}{u}_3, \overset{*}{\theta}_1, \overset{*}{\theta}_2, \overset{*}{\theta}_3 \rfloor^{(\alpha)})^T \quad (13)$$

$$\Delta\{u\}^{(1)} = \Delta(\lfloor U_1, U_2, U_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \rfloor^{(1)})^T \quad (14)$$

$$\Delta\{u\}^{(2)} = \Delta(\lfloor u_1^1, u_2^1, u_3^1, \cdots, u_1^4, u_2^4, u_3^4 \rfloor^{(2)})^T \quad (15)$$

$$[\hat{\Phi}]^{(1)} = [I]^{(1)} \qquad (6\times 6) \quad (16)$$

$$[\hat{\Phi}]^{(2)} = \left[[\hat{\Phi}]_1, [\hat{\Phi}]_2, [\hat{\Phi}]_3, [\hat{\Phi}]_4\right] \quad (6\times 12) \quad (17)$$

ここで(17)式は、運動学的に求める。また(11)式は、要素内でConst. と仮定すると$[\overset{*}{\Phi}]$は次のようにおける。

$$[\overset{*}{\Phi}] = [I] \qquad (6\times 6) \quad (18)$$

要素剛性マトリックスは、前節に従い作成する。

5. 計算例

ここでは、結合要素を用いた計算結果と梁理論との比較を行った。解析モデルの内半径、肉厚そして長さは、それぞれ30mm, 20mm, 1000mmの直管で一端固定とし自由端側に鉛直荷重 $P = 1.28\times10^4$ Kg を作用させた。有限要素モデルは、図3に示した。円周方向の分割は、8等分とした。物性値は $E = 2.1\times10^4$ Kg/mm², $\nu = 0.3$ である。図4にたわみ曲線を示した。段付直管モデルの弾塑性解析の結果は、ページ数の都合で当日示す。

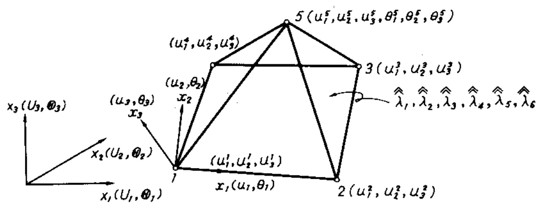

図2. 結合要素

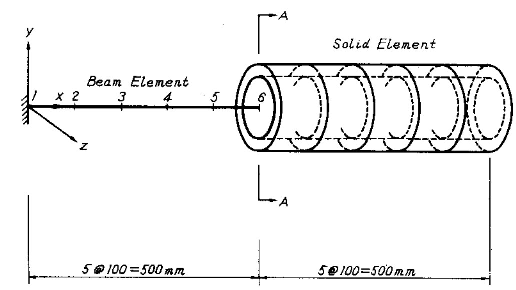

図3. 直管の有限要素モデル

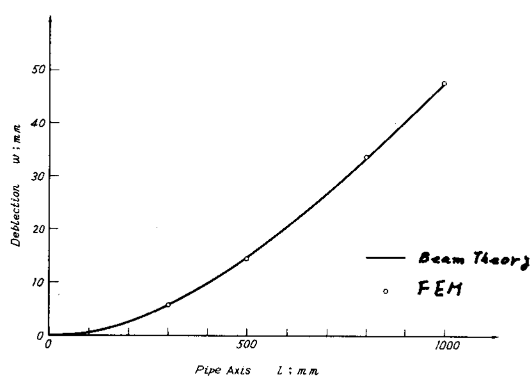

図4. たわみ曲線

6. 参考文献

1) Hibbitt, Sorensen, Marcal "The Elastic-Plastic Creep Analysis of pipelines by Finite Elements," 2nd I.C.P.V.T, 1973 Part I

2) Yagawa, Takeda, Watanabe, Ando, "Elastic-Plastic Analysis of Complex Structures Using Finite Element Method with Lagrange Multipliers" 4th SMIRT, 1977

3) 鷲津"弾性学の変分原理概論"培風館