

熊本大学 正 平井一男 八代工専 〇正 水田洋司
同上 学 前田洋え

一部修正された振動系の固有値解析を、修正前の固有値、固有モードを用いて行なう場合には、振動方程式を Trial and Error Method により解くことが行われているようである。本研究は、修正量を修正前の系に外力として作用させ、Power Method により修正後の系の固有値解析を行おうとするものである。従って、修正前の系の固有値、固有モードを必要とするが、部分マトリックスとベクトルの積の反復計算により解を得ることができる。

解析理論 便宜上、修正前の系を、system A、修正後の系を system B と呼ぶ。外力 F が作用するときの system A の静的変形 W_A は、撓性マトリックス f_A を用いて次式で表わせる。

$$W_A = f_A \cdot F = K_A^{-1} \cdot F \quad (1)$$

ここに、 K_A は system A の剛性マトリックス。また、 $\Delta K, \Delta M$ だけ修正された system B の変形 W_B は

$$W_B = f_B \cdot (I + \Delta K \cdot f_A)^{-1} \cdot F \quad (2)$$

と表わせる。(1)、(2)式より、system A の外力を $(I + \Delta K \cdot f_A)^{-1}$ 倍して、 W_B を求めることができる。いま、任意の変形 $\Phi_n (= \sum d_n \phi_n)$ による慣性力に表わされる外力を用いると、変形 W_B は次式のようなになる。

$$W_B = \lambda \sum \frac{\Phi_n \cdot \Phi_n^T}{\lambda_n} (I + \Delta K \cdot f_A)^{-1} \cdot (I + \Delta M \cdot M_A)^{-1} \cdot M_A \sum d_n \cdot \Phi_n \quad (3)$$

ここに、 M_A は system A の質量マトリックスである。(3)式中の $(I + \Delta K \cdot f_A)^{-1}$ 、 $(I + \Delta M \cdot M_A)^{-1}$ について考える。ここで、 $\Delta K, f_A, \Delta M, M_A$ は下記の成分をもつものとする。

$$\Delta K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f_A = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad \Delta M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_A = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$(I + \Delta K \cdot f_A)^{-1} = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここに、 $b_1 = -(I + \Delta K \cdot f_{22})^{-1} \cdot \Delta K \cdot f_{21}$ 、 $b_2 = (I + \Delta K \cdot f_{22})^{-1} - I$ 、 $b_3 = -(I + \Delta K \cdot f_{22})^{-1} \cdot \Delta K \cdot f_{23}$

$$(I + \Delta M \cdot M_A)^{-1} = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここに、 $e = \Delta M \cdot M_{22}^{-1}$ である。次に、 $(I + \Delta K \cdot f_A)^{-1} \cdot (I + \Delta M \cdot M_A)^{-1}$ を(4)、(5)式を用いて簡単にすると、

$$W_B = \lambda \sum \frac{\Phi_n \cdot \Phi_n^T}{\lambda_n} \left\{ I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 + b_2 e + e & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} M_A (\sum d_n \Phi_n) \quad (6)$$

また、(6)式中の $[b_1 \ b_2 + b_2 e + e \ b_3]$ は、固有モード $\Phi_n (n=1, 2, 3, \dots)$ を用いて次のように表わせる。

$$[b_1 \ b_2 + b_2 e + e \ b_3] = [\sum C_n \Phi_n^T] \quad (7)$$

この時の C_n は、直交条件を用いて(7)式で決定できる。

$$[b_1 \ b_2 + b_2 e + e \ b_3] \cdot M_A \cdot \Phi_n = [\sum C_n \Phi_n^T] \cdot M_A \cdot \Phi_n = C_n \quad (8)$$

ここで、(7)式を(6)式に代入し、 $\lambda=1$ と置く。さらに、直交条件を用いて簡単にすると、(6)式は(7)式のように表わすことができる。

$$W_{B1} = \sum \frac{d_n}{\lambda_n} \Phi_n + \sum \frac{\Phi_n \cdot \Phi_n^T}{\lambda_n} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sum C_n d_n \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \sum d_{n1} \Phi_n \quad (9)$$

$$\text{ここに、} d_{n1} = \frac{1}{\lambda_n} \left\{ d_n + \Phi_n^T \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sum C_n d_n \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\}$$

(9) 式の変形による慣性力 $F_i = \lambda (M_A + \Delta M) W_{B1} = \lambda (M_A + \Delta M) \sum d_{n1} \Phi_n$ が外力として作用した時も、同様に、

$$W_{B2} = \sum \frac{1}{\lambda_n} \left\{ d_{n1} + \Phi_n^T \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sum C_n d_n \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \Phi_n = \sum d_{n2} \Phi_n \quad (10)$$

以下同様にして、

$$W_{Bk+1} = \sum \frac{1}{\lambda_n} \left\{ d_{nk} + \Phi_n^T \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sum C_n d_{nk} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \Phi_n = \sum d_{n(k+1)} \Phi_n \quad (11)$$

$d_{n(k+1)}$ が一定の値に収束するまで、(11) 式繰返し計算を行なう。収束した時の変形 W_{Bk+1} が修正後の系の固有モードである。固有値は、Rayleigh の商を利用して容易に求めることができる。

以上は 1 番目の固有値、固有モードを求める方法であるが、2 番目の固有モードは各変形から 1 番目のモード成分を差し引き、(11) 式が収束するまで繰返し計算する。3 番目以降の固有モードについても同様に行えばよい。

数値計算 図-1 に示すトラス橋を用いて、本法と Jacobi 法による解の比較を示している。system A の各部材の断面積を 30 cm^2 とし、4-5 部材の断面積、節点 4、5 の集中質量を共に system A の $\frac{3}{4}$ に減じた系を system B としている。解の精度は、(11) 式で示される $d_{n(k+1)}$ の収束条件により異なる。表-2、表-3 に示した値は、 $|d_{n(k+1)} - d_{nk}| / |d_{nk}| \leq 10^{-3}$ の収束条件を用い、単精度 (7 桁) 計算である。表-3 の固有モードは、紙面の都合上、1 次 3 方向モードのみ載せている。

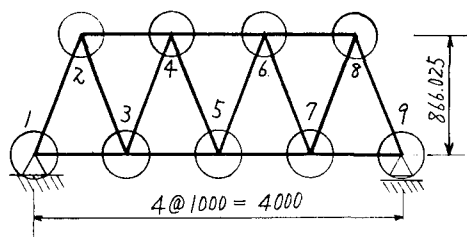


図-1. トラス橋 (単位 cm)

表-1. 各節点の重量 (kg)

節点	重量	節点	重量
1	2500	6	2000
2	1000	7	5000
3	5000	8	1000
4	2000	9	2500
5	5000		

表-4. system A の固有値 (rad/sec)

1	25.66	6	163.84
2	46.29	7	179.08
3	74.24	:	
4	111.87	14	349.22
5	129.08	15	383.56

表-2. 固有値 (rad/sec)

	本 法	Jacobi 法		本 法	Jacobi 法
1	27.18	27.18	9	248.61	248.61
2	40.08	40.08	10	261.97	261.97
3	73.89	73.89	11	269.27	269.27
4	116.10	116.10	12	316.02	316.02
5	132.94	132.94	13	324.15	324.15
6	166.47	166.47	14	353.99	353.99
7	189.55	189.55	15	403.80	403.80
8	200.29	200.29			

表-3. 1 次固有モード

	本 法	Jacobi 法		本 法	Jacobi 法
y_2	0.101767	0.101768	y_5	0.249223	0.249217
y_3	0.181072	0.181070	y_6	0.229790	0.229785
y_4	0.231439	0.231436	y_7	0.176586	0.176581
			y_8	0.094267	0.094265