

1. まえがき 管路、薄肉はりなどの線形常微分方程式に有効な数値解析法を検討した。方法の概要は次の通りである。

- (i) 高階多元の線形常微分方程式を正規形に変換する。
- (ii) 正規形方程式の係数マトリックスの特性を検討する。
- (iii) 検討にもとづいて係数マトリックスの固有値解析を行ない、固有値と右、左の固有ベクトル、主要ベクトルを算出する。これにより同次式の解が求められる。
- (iv) 提案する漸化式を用いて、特解を高精度で算出する。
- (v) 同次解と特解が数値的に求められたので、境界条件にあわせて任意定数を決定する。

本方法によれば、Fourier級数解法など従来の方法では解けないような複雑な境界条件のもとでも計算可能で、その応用範囲は極めて広いものと思われる。

2. 解析理論 管路、薄肉はりなどの高階多元の連立線形常微分方程式は、次に示す正規形に変換することができる。

$$\frac{dY}{dz} = AY + Q(z) \quad (1)$$

ここで、 Y は求めたい未知関数ベクトルであり、 z は軸方向座標、 A は係数マトリックス、 Q は荷重項(非同次項)である。通常 A は定数マトリックスであるが、もし z の関数の場合でも、ある領域内では定数と見なし得るので、以下 A は定数マトリックスとして扱う。

A の元数を n 、Jordan標準形を D とし、右側に示すものとすると、また、 A の固有値に対応する右固有ベクトル、右主要ベクトルを列成分に持つ正則なマトリックスを R とすれば

$$A = RDR^{-1} \quad (2)$$

が成り立つ。さらに、 D 、 e^{Dz} などを右側に示すものとすれば、

$$A^r = R D^r R^{-1} \quad (3)$$

$$e^{Az} = R e^{Dz} R^{-1} \quad (4)$$

となり、以上を用いて(1)式の境界値問題の解は、

$$Y = R e^{Dz} d + R e^{Dz} \int_0^z e^{-Ds} R^{-1} Q(s) ds \quad (\text{但し、} d \text{ は任意定数ベクトル}) \quad (5)$$

(5)式から解を得るには、マトリックス A を考察しておく必要がある。 A の特性行列を求めると次の通りである。

- (1) A は右だたみ型であり(図-1)、大きさは偶数である。
- (2) A の固有値は複素平面上、実軸および虚軸に対称に、かなり広範囲に分布する(図-2)。
- (3) A は固有値0を重根で持つ。固有値0は梁の挙動に対称し、

$$D = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & 0 \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

$$D^r = \begin{bmatrix} \Lambda_1^r & & & 0 \\ & \Lambda_2^r & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda_n^r \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\Lambda_j^r = \begin{bmatrix} \lambda_j^r & c_1 \lambda_j^{r-1} & c_2 \lambda_j^{r-2} & \dots \\ & \lambda_j^r & c_1 \lambda_j^{r-1} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_j^r \end{bmatrix}_{m_j \times m_j}$$

(c_i は2項係数とする)

$$e^{Dz} = \begin{bmatrix} e^{\Lambda_1 z} & & & 0 \\ & e^{\Lambda_2 z} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\Lambda_n z} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$e^{\Lambda_j^r z} = e^{\lambda_j^r z} \begin{bmatrix} 1 & z & \frac{z^2}{2!} & \dots & \frac{z^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & z & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & z \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{m_j \times m_j}$$

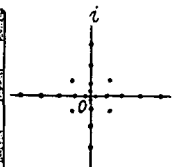
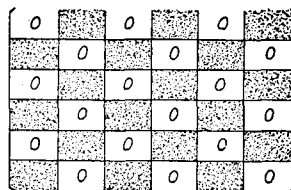


図-1. 右だたみ型マトリックス 図-2. 固有値分布

0 以外は断面変形などのシェルの挙動に对应する。

- (b) 固有値 0 に対する固有ベクトルには主要ベクトルが付随する。0 以外の固有値で実軸、虚軸に対称に分布するもの同士の固有ベクトル成分同士は絶対値が等しい。

以上より、Jordan 標準形 D と R は次のようになる。

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$R = [\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+1}', \dots, \alpha_n, \alpha_n', \alpha_n'] \quad (7)$$

ここで、 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ は 0 以外の固有値であり、 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は対応する右固有ベクトルである。また、 α_{m+1}, α_n' は固有値 0 に対する右固有ベクトルであり、他は右主要ベクトルである。

- (1) 式の一般解 $\tilde{Y}(z)$ を同次解 $\tilde{Y}_1(z)$ と特解 $\tilde{Y}_2(z)$ に分ければ、

$$\tilde{Y}_1(z) = R e^{Dz} d \quad (8)$$

である。ただし、 e^{Dz} において A の固有値 λ_j の実部が正ならば $e^{\lambda_j z} \rightarrow e^{-\lambda_j(L-z)}$ (但し、 $0 \leq z \leq L$)

と置きなおしておく。変換を施された $e^{Dz} d$ を $e^{Dz} d'$ とすれば

$$\tilde{Y}_1(z) = R e^{Dz} d' \quad (9)$$

特解 $\tilde{Y}_2(z)$ については、

$$\tilde{Y}_2(z) = R^{-1} \tilde{Y}_2(z) \quad (10)$$

$$\tilde{Q}(z) = R^{-1} \tilde{Q}(z) \quad (11)$$

を用いて、(1) 式を次式に変換する。

$$\frac{d\tilde{Y}}{dz} = D\tilde{Y} + \tilde{Q} \quad (12)$$

- (6) 式を参照して、 $\tilde{Y}, \tilde{Q}$ の成分を

$$\tilde{Y}^T = [\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m, \tilde{y}_{m+1}, \tilde{y}_{m+2}, \dots, \tilde{y}_{n-3}, \tilde{y}_{n-2}, \tilde{y}_{n-1}, \tilde{y}_n] \quad (13)$$

$$\tilde{Q}^T = [\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m, \tilde{q}_{m+1}, \tilde{q}_{m+2}, \dots, \tilde{q}_{n-3}, \tilde{q}_{n-2}, \tilde{q}_{n-1}, \tilde{q}_n] \quad (14)$$

と置けば、(12) 式は分解して次のように表わされる。

$$\frac{d\tilde{y}_j}{dz} = \lambda_j \tilde{y}_j + \tilde{q}_j \quad (15)$$

$$\frac{d\tilde{y}_m}{dz} = \lambda_m \tilde{y}_m + \tilde{q}_m \quad (16)$$

$$\frac{d\tilde{y}_{m+1}}{dz} = \tilde{y}_{m+2} + \tilde{q}_{m+1} \quad (17)$$

$$\frac{d\tilde{y}_{m+2}}{dz} = \tilde{q}_{m+2} \quad (18)$$

$$\frac{d\tilde{y}_{n-3}}{dz} = \tilde{y}_{n-2} + \tilde{q}_{n-3} \quad (19)$$

$$\frac{d\tilde{y}_{n-2}}{dz} = \tilde{y}_{n-1} + \tilde{q}_{n-2} \quad (20)$$

$$\frac{d\tilde{y}_{n-1}}{dz} = \tilde{y}_n + \tilde{q}_{n-1} \quad (21)$$

$$\frac{d\tilde{y}_n}{dz} = \tilde{q}_n \quad (22)$$

(16) ~ (22) 式の解は直ちに積分形で表示できるが、 $\tilde{q}_j$ ($j=1, \dots, n$) が任意の関数の場合、積分することが難しい。そこで、右側に示した厳密な漸化式を用いることを提案する。これで求める。

(特解を求めるための漸化式)

- a) $\lambda_j \neq 0$ かつ $\text{Re } \lambda_j \leq 0$ の場合

$$\tilde{y}_j(z+\Delta z) = e^{\lambda_j \Delta z} \tilde{y}_j(z) - \frac{1}{\lambda_j} (1 - e^{\lambda_j \Delta z}) \tilde{q}_j(z) \quad (23)$$

$$\tilde{y}_j(z+\Delta z) = e^{\lambda_j \Delta z} \tilde{y}_j(z) - \left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1 - e^{\lambda_j \Delta z}}{\lambda_j^2 \Delta z} \right) \tilde{q}_j(z+\Delta z) + \left(\frac{e^{\lambda_j \Delta z}}{\lambda_j} + \frac{1 - e^{\lambda_j \Delta z}}{\lambda_j^2 \Delta z} \right) \tilde{q}_j(z) \quad (24)$$

$$\tilde{y}_j(z+\Delta z) = e^{\lambda_j \Delta z} \tilde{y}_j(z) - \left\{ \frac{1}{\lambda_j} + \frac{4}{\lambda_j^2 \Delta z} - \left(\frac{1}{\lambda_j^2 \Delta z} - \frac{4}{\lambda_j^3 \Delta z^2} \right) (1 - e^{\lambda_j \Delta z}) \right\} \tilde{q}_j(z+\frac{\Delta z}{2})$$

$$+ \left\{ \frac{8}{\lambda_j^2 \Delta z} + \left(-\frac{4}{\lambda_j^2 \Delta z} + \frac{8}{\lambda_j^3 \Delta z^2} \right) (1 - e^{\lambda_j \Delta z}) \right\} \tilde{q}_j(z-\frac{\Delta z}{2})$$

$$+ \left\{ \frac{e^{\lambda_j \Delta z}}{\lambda_j} - \frac{4}{\lambda_j^2 \Delta z} + \left(\frac{3}{\lambda_j^2 \Delta z} - \frac{4}{\lambda_j^3 \Delta z^2} \right) (1 - e^{\lambda_j \Delta z}) \right\} \tilde{q}_j(z) \quad (25)$$

ここで、 $\tilde{y}_j(z+\Delta z)$, $\tilde{y}_j(z)$, $\tilde{q}_j(z+\Delta z)$, $\tilde{q}_j(z+\frac{\Delta z}{2})$, $\tilde{q}_j(z)$ はそれぞれ $z+\Delta z$, $z+\frac{\Delta z}{2}$, z における $\tilde{y}_j$, $\tilde{q}_j$ の値であり、(23), (24), (25) 式の相違点は Δz 間における $\tilde{q}_j$ を一定、直線変化、2次式で表わされる変化をすると仮定したことである。

- b) $\lambda_j \neq 0$ かつ $\text{Re } \lambda_j > 0$ の場合

$$\tilde{y}_j(z-\Delta z) = e^{-\lambda_j \Delta z} \tilde{y}_j(z) - \frac{1}{\lambda_j} (1 - e^{-\lambda_j \Delta z}) \tilde{q}_j(z) \quad (26)$$

$$\tilde{y}_j(z-\Delta z) = e^{-\lambda_j \Delta z} \tilde{y}_j(z) - \left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1 - e^{-\lambda_j \Delta z}}{\lambda_j^2 \Delta z} \right) \tilde{q}_j(z-\Delta z) + \left(\frac{e^{-\lambda_j \Delta z}}{\lambda_j} - \frac{1 - e^{-\lambda_j \Delta z}}{\lambda_j^2 \Delta z} \right) \tilde{q}_j(z) \quad (27)$$

$$\tilde{y}_j(z-\Delta z) = e^{-\lambda_j \Delta z} \tilde{y}_j(z) - \left\{ \frac{1}{\lambda_j} - \frac{4}{\lambda_j^2 \Delta z} + \left(\frac{1}{\lambda_j^2 \Delta z} + \frac{4}{\lambda_j^3 \Delta z^2} \right) (1 - e^{-\lambda_j \Delta z}) \right\} \tilde{q}_j(z-\frac{\Delta z}{2})$$

$$- \left\{ \frac{8}{\lambda_j^2 \Delta z} + \left(-\frac{4}{\lambda_j^2 \Delta z} - \frac{8}{\lambda_j^3 \Delta z^2} \right) (1 - e^{-\lambda_j \Delta z}) \right\} \tilde{q}_j(z+\frac{\Delta z}{2})$$

$$+ \left\{ \frac{e^{-\lambda_j \Delta z}}{\lambda_j} - \frac{4}{\lambda_j^2 \Delta z} - \left(\frac{3}{\lambda_j^2 \Delta z} + \frac{4}{\lambda_j^3 \Delta z^2} \right) (1 - e^{-\lambda_j \Delta z}) \right\} \tilde{q}_j(z) \quad (28)$$

記号は a) の場合と全く同じである。ただし、a) と逆方向に $\tilde{y}_j(L)$ から逐次積分することは注意を要する。

- c) $\lambda_j = 0$ の場合

この場合、未知関数が単独に分離していないが、次の漸化式で十分なことは式から明らかである。

$$\tilde{y}_j(z+\Delta z) = \tilde{y}_j(z) + \Delta z \tilde{q}_j(z) \quad (29)$$

$$\tilde{y}_j(z+\Delta z) = \tilde{y}_j(z) + \frac{\Delta z}{2} \tilde{q}_j(z+\Delta z) + \frac{\Delta z}{2} \tilde{q}_j(z) \quad (30)$$

$$\tilde{y}_j(z+\Delta z) = \tilde{y}_j(z) + \frac{\Delta z}{6} \tilde{q}_j(z+\Delta z) + \frac{2}{3} \Delta z \tilde{q}_j(z+\frac{\Delta z}{2}) + \frac{\Delta z}{6} \tilde{q}_j(z) \quad (31)$$

記号は a), b) の場合と同じである。