I-59　帯幅減少法の自動化に関する基礎的考察

京都大学工学部　正員　谷口健男
京都大学工学部　正員　白石成人

1. まえがき

構造解析の分野において連立一次方程式の解法は重要であり，従来より種々の解法の提案が行なわれてきた。その1つにバンドマトリクス法がある。この方法を最も有効に用いるには，いわゆる帯幅，プロファイルの最少化を図る必要があり，それを求める問題が帯幅・プロファイル最小化の為のラベリング問題である。ここ10年来この問題に対する種々の解法が計算機利用を目的としたアルゴリズムの提案がなされてきた[1)~3)]が，それらの目的は帯幅・プロファイルの減少であることはもちろんであるが，さらにこの問題は構造解析の前段階であるということより演算時間のかからないものでなければならない。この点を考慮し，文献1)の Suggestion 及び F. Harary の研究[4)]をふまえて計算機利用を目的としない帯幅・プロファイル最小化法の提案もなされている。[5),5)] 一方，アルゴリズム解析の立場よりのこの問題へのアプローチも近年行なわれるようになり重要な成果が導かれている。[6)~10)] すなわち，この問題は本質的に電算機特性に合致せず，よって取り扱いにくい問題（intractable problems）の1つであるということである。

本研究では，まずアルゴリズム論の立場よりみたラベリング問題に関する成果を示し，ついでその成果を導入しながら従来提案された種々のアルゴリズムの検討を行うこと目的とする。

2. NP-Complete Problem としての最小帯幅を与える番号付け問題

V節点，E部材を含む構造物の帯幅を考える場合，近似的にはその自由度を無視し，V点，E線を含むグラフ：G(V, E) を考えればよい。この G(V, E) の各節点に整数列{1, 2, ⋯, n}を添付し，以下の操作を行うとき，β を最小帯幅と呼ぶ。[6)]

$$\beta = \min_{\pi \in S_n} \max_{(i,j) \in E} \left(|\pi(i) - \pi(j)| \right) \qquad (1)$$

ここで S_n は Symmetic group である。上式より明らかに V が増えれば β をもとめるステップは飛躍的に増加し，それは節点数の組み合わせ S_n による。それらの組み合わせのうち少くとも2組が最小値 β を与える。

従来よりこのようなグラフに関する組み合わせ問題の多く（例えば代表的なものとして Traveling Salesman Problem，the Hamilton Circuit Problem 等）は電子計算機の発達にもかかわらず有効なアルゴリズムの発見が行なわれないまま今日に至っている。すなわち組み合わせ問題は計算機の不得意とする分野に属するものと考えられ，例えば 1972 年開かれた Symposium on the Complexity of Computer Computation においても R. M. Karp によりそれが強く指摘されている。[7)] よってこれら諸問題と計算方法との本質的関係をさぐるには計算機の演算機能を単純化し，しかしながらその機能をそこなわないようなモデルの設定が必要となり，そのモデルとして DTM（Deterministic Turing Machine）が挙げられる。このモデルと今日存在する計算機の相違は1回の演算時間の差だけであると考えてよい。通常，問題の困難さはその問題の入力量の代表長に対し，結論が得られるのに要するステップ数で計られ，それをその問題の Time Complexity と言う。よって問題の困難さ算定には，上記モデルを用いてさしつかえなく，問題解決に用するステップ数はこのモデルにより計算される。さらに，このようなモデルの1つとして NDTM（Nondeterministic Turing Machine）が考えられるが，それは上記 DTM において演算がシリーズに行なわれるに対し，分枝のあるトリー，すなわち1つの演算から引きつづく次の演算として複数個存在するという機能をもつものである。この NDTM を用いて，その入力量の polynomial-time-bounded algorithm で表記されるような問題が NP と定義される。[7),8)] このような NP に属する問題は一般に計算機において intractable と考えられる問題であるが，そこに条件を付け加えれば このような問題は DTM で取り扱いうる P 問題となりうることがわかっており，それらは the class of nondeterministic polynomial-time complete（略して

NP-Complete）と呼ばれる。[7),8)] Ch. H. Papadimitriouは上記諸研究の結果を用いて組み合わせ問題の1つである帯幅最小化問題はNP-Completeとなりうることを示している。[6)] しかし，そこにおいて必然的に1つの条件が付加される。すなわち，この問題がNP-Completeとなりうるためには対象とする行列の第1行がfixされた場合という条件である。

3．従来より提案された帯幅減少法に対するアルゴリズム論的考察

元来，帯幅最小化問題はNP問題である。しかしながらCh. H. Papadimitriouの研究[6)]により，ある条件下において，この問題はNP-Completeになりうることが示され，計算機で一応tractableな領域に入ったと言える。一方，文献1，2，3，3′，5，5′は帯幅減少法の典型的なものである。従来より指摘されているように，[5),5′)] 帯幅最小化を図るには，まずLabel "1"が付けられる節点の選定が第1の問題である。また，この問題がNP-Completeとなるためには上記Papadimitriouの研究より明らかなように第1行の設定が大前提となる。この意味において，Label "1"を正確に選定しうるアルゴリズムとしては，1)～3)，5)のうち3)，5)しかなく，よって他のアルゴリズムは帯幅の最小化を行うものではなく，その近似解を求めようとするものでしかないといえる。（これらにおいても，対象系によっては最適解を求めうる場合ももちろん存在する。）文献3，3′と5，5′の検討を行う。前2者は計算利用を目的としたアルゴリズムであるに対し，後2者は手計算を目的としたものであるという相違点が存在するにもかかわらず，帯幅最小化を図るにはLabel "1"を付ける節点の選定が最も重要な点であるとの認識は一致しており，前者においてはグラフのincidence matrixのべき計算によりその節点の選定を行い，後者においてはグラフ理論の直径の概念の導入によりその選定を行っている。しかし，文献11)の研究により，直径を求める演算はまさしく前者の演算方法と一致することがわかり，よって両者の基本戦略は一致する。さらにそのアルゴリズムを検討すれば，それぞれの帯幅は(2)，(3)式で示される。

$$\beta = \min.\ \max_{k} \{ |L_k| + f(L_k) \} \qquad k:\ \text{subgraphの番号} \tag{2}$$

$$\beta = \min.\ \max_{k} \{ L_k + (\text{各subgraph間の接続関係}) \} \tag{3}$$

ここで L_k：Gを距離の概念により部分グラフに分けたとき1つの部分系に含まれる節点数，$f(L_k)$：その部分系内における節点順序入れ換えによる影響。このｆ(L_k)はまさしく(3)式の右辺第2項と一致し，よって両者は完全に一致する。しかしながら，部分系の作り方において明らかにくいちがいがあり，前者において最小値とならない場合が存在する。それは後者が指摘している重要な系，すなわち系の周辺形状が複雑な場合であり，その典型的なものとして分枝を有するトリー系が挙げられる。要するに前者はいまだ汎用性に欠けるといえ，よって今後上に指摘した点を包含しうるようにアルゴリズムを改める必要がある。

4．あとがき

本研究において近年情報工学の分野において得られた成果に基づき，種々の帯幅最小化アルゴリズムの検討を行った。結論は，今日までに提案された計算機アルゴリズムは汎用性に欠ける，もしくは帯幅の減少法でしかないということである。今後自動帯幅減少法アルゴリズムを開発する場合，文献9の結論，すなわち「近似法を目的とする限りにおいてTime Complexityはいくらか低減しうる」ということが役立つと思われる。

[文献] 1). G.G. Alway & D.W. Martin, Computer Journal, Vol. 8, 1965, pp. 264－272， 2). E. Cuthill & J. Mckee, Proc. ACM National Conferance, 1969, pp. 157－172. 3) K.Y. Cheng, Computing 11, 1973, pp. 103－110, 3′) K.Y. Cheng, Computing 11, 1973, pp. 27－30. 4) F. Harary, Large Sparse Sets of Linear Equations, Academic Press, 1970, pp. 139－150. 5) T. Taniguchi, Dissertation, Kyoto Univ. 1974
5′) I. Konishi et al, J. of Structural Mechanics, 4(2), 1976, pp. 197－226, 6) Ch. H. Papadimitriou, Computing 16, 1976, pp. 263－270 7) R.M. Karp, Complexity of Computer Computations, Plenum Press, 1972, pp. 85－103
8) A.V. Aho et al, The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, Chapter 10, 1974
9) S. Sahni et al, Proc. 15th SWAT Symposium, 1974, pp. 28－32, 10) M.R. Garey, et al, Proc. 6th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1974, pp. 47－63, 11) 白石成人他，電算機利用に関するシンポジウム，土木学会，1976, pp. 5－8