I-48　せん断変形を考慮した弾性支承上のはり

東京理科大学　理工学部　正会員　○臼木恒雄
早稲田大学　理工学部　正会員　平嶋政治

1. 序論

弾性支承上のはりの理論に関して、古くは Hayashi, K. [1] などの研究があり、また Hetényi, M. [2] なども有名である。この理論は、高性能電子計算機の利用によって伝達マトリックス法で明解かつ迅速に解かれるようになった。伝達マトリックス法を用いて弾性支承上のはりを解いた文献としては Petersen, Ch. [3], Miranda/Nair [4] などが挙げられよう。これらの文献 [1]~[4] においては、せん断力によるはりの変形は、微少として無視されている。しかし部材断面寸法に比べてはりの長さが短い場合などにはせん断変形の影響は無視しがたいことは周知の事実である。そこで Vlasov/Leontév [5] は軸方向と面内方向のせん断変形の影響を考慮した弾性支承上のはりの理論を組み立てている。しかしこの手法ではその理論の精密さゆえに複雑な連立微分方程式系を解かねばならず、さらにそれ故にせん断変形の影響の仕方のメカニズムを結果から考察することは困難である。そこでこの抄録では、軸方向のせん断変形の量は極めて少いとして無視し、面内方向のせん断変形のみを考慮して単一の微分方程式を作成した。

2. 弾性支承上のはりの微分方程式

単位長さあたりの弾性支承の反力 $p(x)$ は、その位置のたわみ $w(x)$ に比例するとして

$$p(x) = K_B \cdot w(x) \tag{1}$$

で与えられる。ここで、K_B は支承の弾性定数である。次に力学の一般的な符号則より図-1 のはりのエレメントの力の釣合条件より次式が得られる。ここで $q(x)$ は外力の分布横荷重である。

$$Q'(x) = -q(x) + p(x) \tag{2}$$

$$M'(x) = Q(x) \tag{3}$$

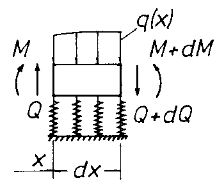

図-1

せん断変形を考慮したときの断面力と変形量の関係は次式で与えられる。

$$M(x) = -EI \cdot \varphi_M'(x) \tag{4}$$

$$Q(x) = \frac{GF}{\varkappa_s}\left[\,w'(x) - \varphi_M(x)\right] \tag{5}$$

ここで、$\varphi_M(x)$ は軸応力 σ_x の影響によるはりの傾きであり $\varphi_M(x) = w_M'(x)$ で定義される。また F は、はりの断面積、$\varkappa_s$ はせん断変形のパラメーターである。(1), (2), (3), (4), (5) から φ_M と $q(x)$ のみの式を作ると

$$\boxed{EI\,\varphi_M^{IV} - k_s K_B \varphi_M'' + K_B \varphi_M = q'(x)} \tag{6}$$

となる。ただし、

$$k_s = \varkappa_s \frac{EI}{GF} \tag{7}$$

である。また、$w(x)$ を φ_M と $q(x)$ で表現すると

$$w(x) = -\frac{EI}{K_B}\varphi_M'''(x) + \frac{q(x)}{K_B} \tag{8}$$

となる。せん断力 $Q(x)$ は、(3), (4) から

$$Q(x) = -EI\,\varphi_M''(x) \tag{9}$$

で与えられる。

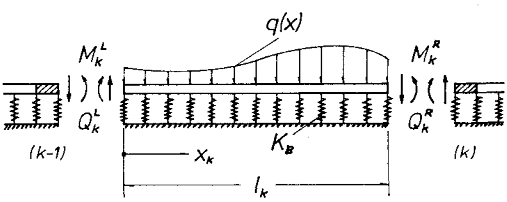

図-2　格間 k の諸量

3. 伝達マトリックス法の適用

(6) 式を解いて次のごとき解を得る。ここで、$C_1 \sim C_4$ は積分定数である。

$$\varphi_M(x) = C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x) + C_3\Phi_3(x) + C_4\Phi_4(x) + \frac{1}{2EI\lambda_1\lambda_2}[\Phi_2(x)\cdot F_1(x) + \Phi_1(x)\cdot F_2(x) - \Phi_4(x)\cdot F_3(x) - \Phi_3(x)\cdot F_4(x)] \tag{10}$$

ただし、

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{K_B}{4EI}}\cdot\sqrt{1 + k_s\sqrt{\frac{K_B}{4EI}}}\ ,\qquad \lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{K_B}{4EI}}\cdot\sqrt{1 - k_s\sqrt{\frac{K_B}{4EI}}} \tag{11}$$

$$\Phi_1(x) = \sinh\lambda_1 x\cdot\sin\lambda_2 x\ ,\quad \Phi_2(x) = \cosh\lambda_1 x\cdot\cos\lambda_2 x\ ,\quad \Phi_3(x) = \sinh\lambda_1 x\cdot\cos\lambda_2 x\ ,\quad \Phi_4(x) = \cosh\lambda_1 x\cdot\sin\lambda_2 x \tag{12}$$

$$F_1(x) = \int_0^x q(x)\cdot\Phi_1(x)\,dx\ ,\quad F_2(x) = \int_0^x q(x)\cdot\Phi_2(x)\,dx\ ,\quad F_3(x) = \int_0^x q(x)\cdot\Phi_3(x)\,dx\ ,\quad F_4(x) = \int_0^x q(x)\cdot\Phi_4(x)\,dx \tag{13}$$

である。(10)式を(4), (8), (9)にそれぞれ代入することによってすべての状態量 $\mathbb{V} = [w\ \varphi_M\ M\ Q\ 1]^T$ は、積分定数 $C_1 \sim C_4$ に関する式として表現される。いま図－2のごとき長さ l_k の格間 k を考えると、その左右端の状態量ベクトル $\mathbb{V}_k^{*L}$, $\mathbb{V}_k^{*R}$ の間には

$$\mathbb{V}_k^{*R} = \mathbb{F}_k^*\cdot\mathbb{V}_k^{*L} \tag{14}$$

なる関係式が成り立ち、その格間伝達マトリックス $\mathbb{F}_k^*$ は表－1で与えられる。ここで ＊は無次限化された量を意味し、任意の集中荷重および格間長 P_c, l_c を用いて次式で与えられる。

$$w = w^*\cdot\frac{P_c l_c^3}{EI_c}\ ,\quad \varphi_M = \varphi_M^*\cdot\frac{P_c l_c^2}{EI_c}\ ,\quad M = M^* P_c l_c\ ,\quad Q = Q^* P_c \tag{15}$$

表－1　格間伝達マトリックス $\mathbb{F}_k^*$

$\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{2\lambda_1\lambda_2}\Phi_1 + \Phi_2$	$\frac{1}{2}\frac{1}{l_c}\left(\frac{\Phi_3}{\lambda_1}+\frac{\Phi_4}{\lambda_2}\right)$	$-\frac{1}{2}\frac{1}{l_c^2}\frac{I_c}{I_k}\frac{\Phi_1}{\lambda_1\lambda_2}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{l_c^3}\frac{I_c}{I_k}\frac{\lambda_2(3\lambda_1^2-\lambda_2^2)\Phi_3+\lambda_1(\lambda_1^2-3\lambda_2^2)\Phi_4}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^2}$	u_{15}
$\frac{1}{2}l_c(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\left(\frac{\Phi_3}{\lambda_1}-\frac{\Phi_4}{\lambda_2}\right)$	$-\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{2\lambda_1\lambda_2}\Phi_1 + \Phi_2$	$-\frac{1}{2}\frac{1}{l_c}\frac{I_c}{I_k}\frac{\lambda_2(3\lambda_1^2-\lambda_2^2)\Phi_3-\lambda_1(\lambda_1^2-3\lambda_2^2)\Phi_4}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}$	$-\frac{1}{2}\frac{1}{l_c^2}\frac{I_c}{I_k}\frac{\Phi_1}{\lambda_1\lambda_2}$	u_{25}
$\frac{1}{2}l_c^2\frac{I_k}{I_c}\frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^2}{\lambda_1\lambda_2}\Phi_1$	$-\frac{1}{2}l_c\frac{I_k}{I_c}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\left(\frac{\Phi_3}{\lambda_1}-\frac{\Phi_4}{\lambda_2}\right)$	$-\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{2\lambda_1\lambda_2}\Phi_1 + \Phi_2$	$\frac{1}{2}\frac{1}{l_c}\left(\frac{\Phi_3}{\lambda_1}+\frac{\Phi_4}{\lambda_2}\right)$	u_{35}
$\frac{1}{2}l_c^3\frac{I_k}{I_c}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2\left(\frac{\Phi_3}{\lambda_1}+\frac{\Phi_4}{\lambda_2}\right)$	$-\frac{1}{2}l_c^2\frac{I_k}{I_c}\frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^2}{\lambda_1\lambda_2}\Phi_1$	$\frac{1}{2}l_c(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\left(\frac{\Phi_3}{\lambda_1}-\frac{\Phi_4}{\lambda_2}\right)$	$\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{2\lambda_1\lambda_2}\Phi_1 + \Phi_2$	u_{45}
0	0	0	0	1

$$u_{15} = -\frac{1}{2}\frac{1}{P_c l_c^3}\frac{I_c}{I_k}\frac{\lambda_1(\lambda_1^2-3\lambda_2^2)(\Phi_3F_1+\Phi_4F_2-\Phi_1F_3-\Phi_2F_4)-\lambda_2(3\lambda_1^2-\lambda_2^2)(\Phi_4F_1-\Phi_3F_2+\Phi_2F_3-\Phi_1F_4)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^2}\ ,\quad u_{25} = \frac{1}{2}\frac{1}{P_c l_c^2}\frac{I_c}{I_k}\frac{\Phi_2F_1+\Phi_1F_2-\Phi_4F_3-\Phi_3F_4}{\lambda_1\lambda_2}$$

$$u_{35} = -\frac{1}{2}\frac{1}{P_c l_c}\frac{\lambda_1(\Phi_3F_1+\Phi_4F_2-\Phi_1F_3-\Phi_2F_4)-\lambda_2(\Phi_4F_1-\Phi_3F_2+\Phi_2F_3-\Phi_1F_4)}{\lambda_1\lambda_2}\ ,\quad u_{45} = -\frac{1}{2}\frac{1}{P_c}\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)(\Phi_2F_1+\Phi_1F_2-\Phi_4F_3-\Phi_3F_4)-2\lambda_1\lambda_2(\Phi_1F_1-\Phi_2F_2+\Phi_3F_3-\Phi_4F_4)}{\lambda_1\lambda_2}$$

ただし、ここで $\Phi_i = \Phi_i(l_k)$, $F_i = F_i(l_k)$ $(i = 1 \sim 4)$ である。

4. 結　論

この格間伝達マトリックスと境界条件、中間支持条件を用いてはりの応力解析を行うことができる。その際、境界および中間支持条件はせん断変形を考慮しない場合の境界マトリックス、格点伝達マトリックスを使用すればよい。なぜならば、ここでは傾きφの代りに φ_M が用いられているからである。なお、この格間伝達マトリックスは、箱桁等の断面変形問題の解析に対しても記号を変換するだけで適用することが可能である。

5. 参考文献

[1] Hayashi,K.,:Theorie des Trägers auf elastischer Bettung, Berlin, Verlag Springer, 1921
[2] Hetényi,M.,:Beams on elastic Foundation, Scientific Series, Vol.XVI, Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1958
[3] Petersen,Ch.,:Das Verfahren der Übertragungsmatrizen (Reduktionsverfahren) für den kontinuierlich elastisch gebetteten Träger, Die Bautechnik 42(1965), Nr.3, pp.87-89
[4] Miranda,C. and Nair,K.,:Finite beams on elastic foundation, Proc. ASCE, Vol.92, ST2, April 1966, pp.131-142
[5] Vlasov,V.Z. and Leont'ev,N.N.,:Beams, plates and shells on elastic foundations, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1966