

信州大学工学部 正員 草間 孝志

信州大学工学部 正員 三井 康司

石垣 機 工 正員 入口 義久

1. まえがき 「対応原理」によれば、線形粘弾性問題の解は、これと同じ形状、境界条件をもつ弾性問題における弾性定数をラプラス変換パラメータを含む粘弾性定数でおきかえ、逆変換をほどこすことによって粘弾性問題における解が得られる。しかしながら、像空間での解が数値的にしか得られない場合には、数値逆変換を行わなくてはならない。

本報告は、解の関数形を予測し、逐次法の考えで未定係数の決定を行なうことによって解き、さらに、2, 3の方法による結果と比較検討したものである。

2. 対応原理による変位ベクトルの決定 解法のあらましはすでに発表^{1,2)}したが、簡単に記すところのとおりである。変位ベクトル、荷重ベクトルのラプラス変換を $\{\bar{s}(s)\}$, $\{\bar{F}(s)\}$ とすると、対応原理より

$$[\bar{K}(s)]\{\bar{s}(s)\} = \{\bar{F}(s)\} \quad (1)$$

を得る。ここに $[\bar{K}(s)]$ は変換パラメータ s でおきかえたときの剛性マトリクスである。問題が複雑な場合には、(1)を解くことは容易でない。そこで、いま、

$$\{\bar{s}(t)\} = \{\bar{s}(0)\} + [A]\{\bar{q}(t)\} \quad (2)$$

を仮定する。ここに、 $[A]$ は未定係数マトリクスであり、 $\{\bar{q}(t)\}$ は $\bar{q}(0) = 0$ を満足する関数列とする。

(2)のラプラス変換より

$$\{\bar{w}(s)\} = [A]\{\bar{q}(s)\} \quad (3)$$

ここに、 $\{\bar{w}(s)\} = \{\bar{s}(s)\} - \{\bar{s}(0)\}/s$ である。

いま、 s にある数値 $s_k (k=1 \sim n)$ を代入すると、(1)より $\{\bar{s}(s_k)\}$ が、(3)より $\{\bar{w}(s_k)\}$ が求まる。よって、

$$[\bar{W}] = [\{\bar{w}(s_1)\} \{\bar{w}(s_2)\} \cdots \{\bar{w}(s_n)\}] \quad (4)$$

$$[\bar{Q}] = [\{\bar{q}(s_1)\} \{\bar{q}(s_2)\} \cdots \{\bar{q}(s_n)\}] \quad (5)$$

とおくと、次式を得る。

$$[\bar{W}] = [A][\bar{Q}] \quad (6)$$

$[\bar{Q}]$ は n 次の正方行列であるから、

$$[A] = [\bar{W}][\bar{Q}]^{-1} \quad (7)$$

より、 $[A]$ が決定され、(2)より変位ベクトルが元の関数の形で求まる。

3. ひずみ、応力ベクトルの決定 $[B]$ をひずみ～変位マトリクスとすると、ひずみベクトル $\{\epsilon(t)\}$ は

$$\{\epsilon(t)\} = [B]\{\bar{s}(t)\} \quad (8)$$

であらわされる。また、粘弾性体の応力ベクトル $\{\sigma(t)\}$ は、ひずみベクトルの履歴積分によってあらわされるゆえ、(2), (8)を用いると、

$$\{\sigma(t)\} = [D(t)][B][A]\{\bar{q}(t-t')\} dt' \quad (9)$$

を得る。ここに、 $[D(t)]$ は応力～ひずみマトリクス。

4. 数値計算例 計算には t の代りに t/τ で表現したものを用いた。ここに、 τ は時間の次元をもつ量(緩和時間、遅延時間)である。このようにすると、変換パラメータは zs となる。関数 $f(t)$ および $\bar{f}(s)$ がラプラス変換可能で、 $\lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{f}(s)$ が存在するとき、

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{f}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{f}(s)$$

が成立することが知られている。したがって、 $\tau (=1/zs)$ を変換パラメータとすると、初期応答 $\{\bar{s}(0)\}$ は $zs=0$ とおいたときの(1)の解にほかならない。このため、実際の計算には $\tau_k (k=1 \sim n)$ を変化させた。なお、 $\tau_k = 2.0^{(k-1)}$ 、 $n=6$ とし、仮定関数 $\bar{q}_j(t)$ は材料のクリープコンプライアンスの式形を尊重して、

$$\bar{q}_j(t) = 1 - \exp(-jt/\tau) \quad (j=1 \sim n-1) \quad (10-a)$$

$$\bar{q}_n(t) = t/\tau \quad (10-b)$$

とし、粘弾性固体の場合には(10-b)の項を無視する。

以下、正解がわかっているつぎの2例を示す。

a) 単軸引張り $\sigma_x = \sigma_x(t)$ をうける粘弾性体の平面ひずみ場における ϵ_x, ϵ_y を求める。図-1の○印は ϵ_x の計算結果で、実線は厳密解である³⁾。

b) Lee⁴⁾ と Zienkiewicz⁵⁾ が取り扱った円筒

粘弾性材料は弾性的体積変化とMaxwell的形狀変化を示す材料である。像空間での解 $\{\bar{s}(s)\}$ を求めるのに、図-2のように分割した有限要素法を用いた。応力の計算は式(9)によったが、積分は簡単であり、 $\{\sigma(t)\}$ は t の関数の形で得ることができる。図-3, 4の

○印は計算結果で、実線は厳密解である。

5. その他の解法との比較 数値ラプラス逆変換には各種の方法⁶⁾が考えられている。それらのうち2, 3の方法による解との比較を行なった。Papoulisは C_j を未定係数とする偶関数のルジャンドル多項式を用いて、 $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j P_{2j}(e^{-x/2})$ の形で解を得る方法を提案し、 $s_j = (2j+1)\delta$, ($j=0, 1, 2, \dots$) とおくことによって、 C_j が得られることを示した。図-1の×印はこの方法による解であり、この場合、 $\delta=0.1$ を用いると、すべての σ についてよい一致をみるが、一般には δ の値のとり方によって、 σ の適用範囲を検討しなくてはならない。つぎに、Widderの逆変換公式 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(-1)^n s^{n+1}/n!\} d^n f(s)/ds^n|_{s=x/n}$ にCollatzの多変近似による数値微分法を適用して計算した。図-1, 3, 4の・印は $n=5$, $\Delta s=0.01$ で、7変近似のときの解である。この場合5%程度の誤差で解を

得ることができたが、 $n, \Delta s$ のとり方に注意を要する。

本文での方法は、仮定関数 $g_j(x)$ と s_j とは任意に選択できるが、もし、 $g_j(x) = e^{-x/2\delta}$, $s_j = 1/\delta$ とするとSchaperyの最小自乗法による逆変換法に一致する。

6. 結び いままでに取り扱ったいくつかの問題に対しては、いづれもよい結果を得た。また、周期的な荷重に対しては $g_j(x)$ を周期項と過渡項との和であらわせばよい。(計算は信大→東大計算機センター利用)
参考文献 1) 丸山, 草間: 粘弾性地盤上のアーチ構造物の一計算, 年次講演, 1976, 2) 草間, 三井, 入江: ラプラス変換による線形粘弾性問題の数値解析, 中部部講演, 1977, 3) 山田: 塑性・粘弾性, 培風館, 1972, 4) Lee et al.: Stress Analysis for Linear V-E Materials, Trans. Soc. Rheol. II, 1959 5) Zienkiewicz et al.: A Numerical Method of V-E Stress Analysis, Int. J. mech. Sci., Vol. 10, 1968, 6) Cost: Approximate Laplace Transform Inversion in V-E Stress Analysis, AIAA. J. Vol. 2, No. 12, 1964

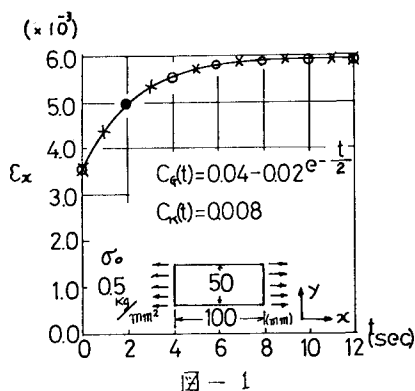


図-1

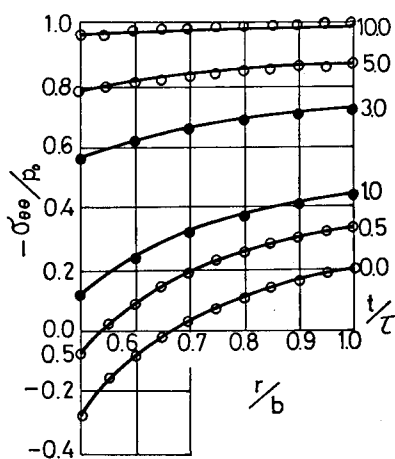


図-3

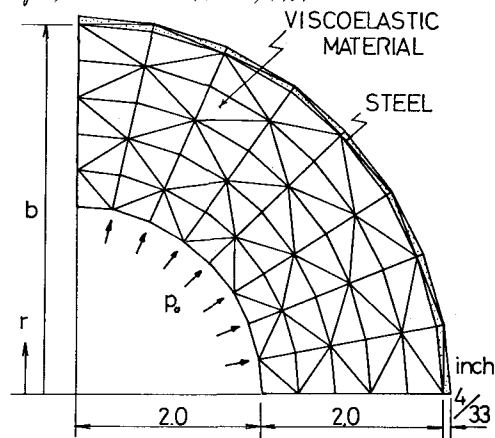


図-2

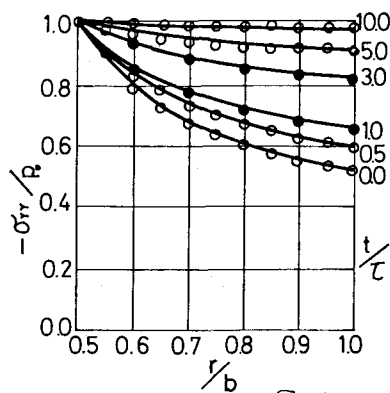


図-4