I-46　切羽周辺の三次元粘弾性解析

京都大學大学院　学生員　○中島　信
京都大學工学部　正　員　丹羽義次
〃　　〃　　福井卓雄

1. はじめに

近年，各種の巨大な地中構造物が数多く計画，施工されるようになり，とりわけ最近の交通網開発においては種々の制約条件から，路線の多くの部分がトンネルとして建設されるケースが目立つようである。　この傾向は，いきおい地質の良くない地盤中にもトンネルを通す結果となり，施工上数々の困難を伴っているのが現状である。　これらの問題点を解決すべく対策を講じるためにも，我々はまずその問題の性質を把握し，力学的特性，すなわち，このような構造物周辺の応力，変形状態，特にそれらの経年的な挙動特性を的確に知ることが必須となってきた。　しかしながら一般に地盤はその内部に複雑な構造を持ち，これを簡単に一つの連続体モデルで表現しようとしても困難なことが多いが，才一次近似としては，弾性体あるいは線形履歴法則に従う連続体と見なすことにも大きな意義があると考えられる。　従来，この種の解析には有限要素法が適用されることが多かったが，そのほとんどが2次元的な解析であり，3次元的な解析では有限要素法の有用性が薄れ，また、現在の電子計算機では十分な解析結果を得ることはかなり困難である。　一方，積分方程式法は，未知量を，境界上のみにおいて考えればよいので，この種の3次元問題の取り扱いには有利なものとなる。

そこで，ここでは，トンネル周辺の地山をモデル化して，線形粘弾性体と仮定し，施工上特に問題となるトンネル切羽付近の応力，変位の過渡的変化状態を，積分方程式法，及びLaplace変換の有用性を利用することによって，純3次元的に解析することを試みる。　すなわち，対応の原理より，基礎方程式をLaplace変換することで線形弾性問題と同等の式を得，これより積分方程式法によって変換域での応力，変位を求め，これを数値Laplace逆変換することにより最終的な解を得ようとする手順である。　以下にその定式化を略述する。

2. 問題の定式化

物体が等方均質の線形粘弾性体であるとし，$e_{ij}(x,t)$，$u_i(x,t)$，$\sigma_{ij}(x,t)$，$F_i(x,t)$ をそれぞれ，時刻t，座標xでのひずみ，変位，応力，物体力とすると，

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2}\left[u_{i,j}(t) + u_{j,i}(t) \right] \quad (1) \qquad \sigma_{ij,j}(t) + F_i(t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (2)$$

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij}\int_{-\infty}^{t} \lambda(t-\tau)\frac{\partial e_{kk}}{\partial \tau}\,d\tau + 2\int_{-\infty}^{t} \mu(t-\tau)\frac{\partial e_{ij}}{\partial \tau}\,d\tau \qquad (3)$$

式(1)，(3)を(2)に代入すれば，場の支配方程式は変位で表現され，次のようになる。

$$\int_{-\infty}^{t} \mu(t-\tau)\frac{\partial u_{i,jj}(\tau)}{\partial \tau}d\tau + \int_{-\infty}^{t}\left[\lambda(t-\tau)+\mu(t-\tau)\right]\frac{\partial u_{j,ji}(\tau)}{\partial \tau}\,d\tau + F_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (4)$$

初期条件および境界条件は，

$$u_i(t) = e_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) = 0 \qquad -\infty < t < 0 \qquad (\text{自然状態}) \qquad (5)$$

$$T_i(t) = \sigma_{ij}(t)\,n_j = S_i(t) \ \text{on}\ B_\sigma \quad (6) \qquad u_i(t) = \Delta_i(t) \ \text{on}\ B_u \qquad (7)$$

（Laplace変換）

一般に関数$f(t)$のLaplace変換を，$f^*(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\,e^{-s\tau}d\tau$　のように表わすと王，上の式(4)，(6)，(7)を(5)なる初期条件のもとに，時刻tについてLaplace変換すると，場の支配方程式及び境界条件は，

$$\frac{\mu^*(s)}{\rho}u^*_{i,jj}(x,s) + \frac{\lambda^*(s)+\mu^*(s)}{\rho}u^*_{j,ji}(x,s) - s^2 u_i^*(x,s) = -\frac{1}{\rho}F_i^*(x,s) \qquad (8)$$

$$T^*(s) = \sigma_{ij}^*(s)\,n_j = S_i^*(s) \ \text{on}\ B_\sigma \quad (9) \qquad u_i^*(s) = \Delta_i^*(s) \qquad (10)$$

また，特に負荷が慣性力を無視できるほどゆるやかであるとする，準静的問題では，(8)は，

$$\frac{\mu^*(s)}{\rho} u^*_{i,jj}(x,s) + \frac{\lambda^*(s)+\mu^*(s)}{\rho} u^*_{j,ji}(x,s) = -\frac{1}{\rho} F^*_i(x,s) \tag{11}$$

のようになり、これは、静的な線形弾性体に対する問題と同等の式となる。

(積分方程式化)　静的な線形弾性問題の積分方程式への定式化，およびその3次元的な数値解析上の取り扱いについては，(丹羽他，「トンネル切羽周辺の三次元応力状態」S.51 関西支部概要集 I-6) 等，を参照されたい。

3．数値 Laplace 逆変換

上記の積分方程式を解く過程を，各種の Laplace 変換の parameter s について適当な回数だけ繰り返すことによって得られるデータをもとに，最終的な解を得るために，Laplace 逆変換を数値的に実行するわけであるが，ここで採用する逆変換の手法は，あらかじめ解の関数型をある程度予想し，すなわち，例えば，

$$f(t) = A + Bt + \sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha \exp(-b_\alpha t)$$

のように表現できると仮定し，この未定係数を，上のデータから求めようとするものである。　parameter s の値の選び方は逆変換の精度と大いに関係するが，この種の問題に対しては，$s-(s \times f^*(s))$ のグラフが両端共に収束するような，s の値の幅がめやすとなることは先に発表したとおりである。(第31回年次学術講演会概要集 I-303 参照)

さらに，ここでは数値計算の経済性の考慮から，関数補間の考え方を導入するなど，積分方程式を解く回数をできるだけ少なくして，しかも精度良い解を得ることを試みる。

4．解析の一例

一例としてまず，一様な応力状態にある，Voigt モデルで表現できるような線形粘弾性体の地山中に，瞬間的にトンネルを開削したと仮定した場合の，切羽付近での変位の変化の様子を解析してみた。　図-1に示すように，円形断面のトンネルの境界を分割し，境界上での密度はそれぞれの要素上で一定値をとるものと仮定し，また，計算機の容量，経済性などから，問題の対称性を考慮し，トンネル表面の1/4のみについて考える。

地山が x_1 軸に沿ったトンネル軸に垂直な直応力を一様に受けている場合の，解析結果の一例を示したものが図-2，3である。　ただし，式(3)に表われる緩和関数を Laplace 変換したもの，$\lambda^*(s)$，$\mu^*(s)$ は，$\sigma^{*\prime}_{ij} = sG^*_1(s) \times e^{*\prime}_{ij}$，および $\sigma^*_{kk} = s\,G^*_2(s)\,e^*_{kk}$ なる $G^*_1(s)$，$G^*_2(s)$ によって，

$\lambda^*(s) = \frac{1}{3} s\,[G^*_2(s) - G^*_1(s)]$，　$\mu^*(s) = \frac{1}{2} s\,G^*_1(s)$ として

与えるが，どのようなモデルを採用するかによって，もちろん挙動特性は変化する。　今後，より実情に即した問題の設定等，考慮すべき点は多いが，この種の問題に対しても数値ラプラス逆変換の応用で，十分な精度の解が得られることが実証されたといえよう。

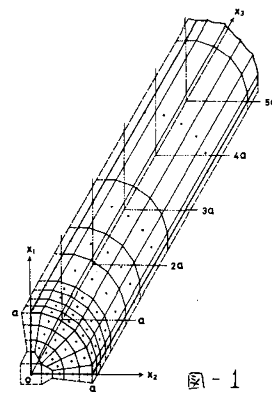

図-1

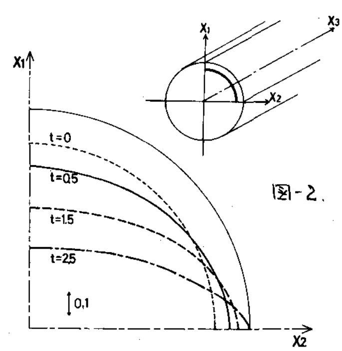

図-2.

5．おわりに

以上，Laplace 変換を応用した三次元粘弾性解析について述べてきたが，元来この手法は，他の差分法等と違って誤差の累積がない等各種の利点をもっている。　現在，線形粘弾性モデルの選択，および計算の経済性について検討中であり，他の解析例とともに，考察の結果は当日とりまとめて発表する予定である。

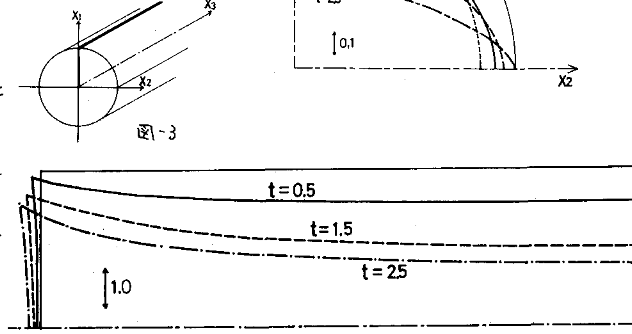

図-3