

大同工業大学 工学部 正員 水沢富作
名古屋大学 工学部 〃 梶田建夫

1. 序文

斜板の固有振動解析は、一般に解析的に解くことが困難であるので、*Raleigh-Ritz*法、*Galerkin*法、有限要素法などの数値解析法によって解析される場合が多い。しかし、*Kaul and Cadabre*¹⁾が指摘しているように、斜角が増大するにつれて、解の安定性が悪くなり、各種解析法による結果の数値に大きなばらつきが見られる。また、*Raleigh-Ritz*法、*Galerkin*法において、自由の境界を含む問題では、どのような変位関数を用いるかが重要な問題となる。すなわち、変位関数に単純に自由端を含むものの特性関数を用いると、精度上よく、モード形、および、数値計算上からも問題が生じるようなことがある。

そこで、これらの問題を考慮して、*Raleigh-Ritz*法での変位関数として、節英で高次の導関数まで連続にでき、複雑な曲線をなめらかに近似できる *B-spline* 関数というものを採用した。また、任意の境界条件を考慮できるように、境界で仮想ばねを導入し、解析を行った。本解析手法の精度、収束性およびモード形上の問題点について、2通りの数値計算例を用いて検討を行った。

2. 解析手法

B-spline 関数は、*truncated power function* の集合として定義される。この関数の代数的特性については、*Schoenberg* の論文²⁾に詳述されている。ここでは、*B-spline* 関数を図示することによって述べる。図-1では、正規化された *B-spline* 関数 $N_{i,k}(x)$ について、*spline* 次数 $k=1, 2, 3, 4$ の場合について示されている。また図-2では、 i を変化した場合の関数も示したものである。この関数を組合せて、どのような任意の関数を作り出すことができる。

$$F(x) = \sum C_i \cdot N_{i,k}(x) \quad (1)$$

ここで、 C_i は $N_{i,k}(x)$ に関する係数である。

2-1. *Raleigh-Ritz* 法による定式化

B-spline 関数を変位関数として用いる場合 *Raleigh-Ritz* 法による斜板の固有振動解析式を示す。ここで用いられる *B-spline* 関数では、境界条件を満足する式を単純に作り出すことが困難であるので、境界条件に対応する仮想ばねを添え、これによるエネルギーを板の固有エネルギーに付加する手法を用いている。仮想ばねとしては、たわみ w 、回転角 $\partial w / \partial x$ 、 $\partial w / \partial y$ に対応するものが考えられ、それぞれは変位を ψ 、 θ 、 ϕ とする。ただし、固定条件として、 ψ の値を、自由条件として、0 を導入してやればよい。

この境界条件に関する項を含めた系全体のポテンシャルエネルギー

1) 運動エネルギー T を汎関数標 ψ, θ, ϕ を用いて表すことができる。

$$U = D/2 \cdot \text{sec}^3 \phi (b/a)^2 \left[\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \sin \phi \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ \left. - 2(1-\nu) \cos^2 \phi \cdot \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy$$

$$+ 1/2 (\psi w^2 + \theta \frac{\partial w}{\partial x} + \phi \frac{\partial w}{\partial y})^2 \Big|_{\psi=0} + 1/2 (\psi w^2 + \theta \frac{\partial w}{\partial x} + \phi \frac{\partial w}{\partial y})^2 \Big|_{\psi=1} \\ + 1/2 (\psi w^2 + \theta \frac{\partial w}{\partial x} + \phi \frac{\partial w}{\partial y})^2 \Big|_{\eta=0} + 1/2 (\psi w^2 + \theta \frac{\partial w}{\partial x} + \phi \frac{\partial w}{\partial y})^2 \Big|_{\eta=1} \quad (2)$$

$$T = 1/2 \cdot \rho \cdot h \cdot \omega^2 \cdot a \cdot b \cos \phi \int_0^1 \int_0^1 w^2 dx dy \quad (3)$$

ここで、 $\lambda = a/b$ 、 D は板の曲剛度、 ρ は密度、 ν はポアソン比、 ϕ は斜角、

ω は円振動数を示す。

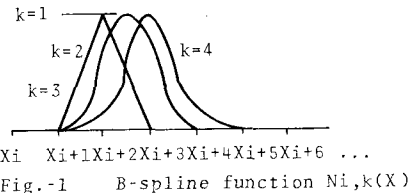


Fig.-1 B-spline function $N_{i,k}(X)$

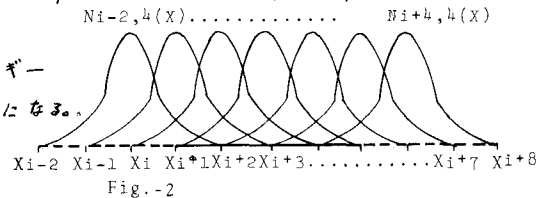


Fig.-2

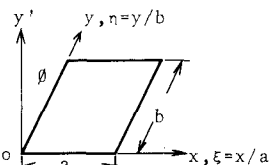


Fig.-3 Sketch of skew plate in skew coordinate system

変位関数を先に述べた δ -spline 関数を用いてフジ
のように仮定する。

$$W_{mn}(\xi, \eta) = \sum \sum C_{mn} N_{m,K}(\xi) \cdot N_{n,K}(\eta) \quad (4)$$

$$W_{rs}(\xi, \eta) = \sum \sum C_{rs} N_{r,K}(\xi) \cdot N_{s,K}(\eta)$$

式(4)を式(2), (3) に代入し, *Kaluish-Ritz*法により,
フジの式が得られる。

$$\partial (U - T) / \partial C_{mn} = 0 \quad (5)$$

$$\text{これをマトリックス表示すると } [K] \{C\} = M^2 [M] \{C\} \quad (6)$$

ここで, $M = \omega \cdot a^2 \cdot \cos^2 \phi / \sqrt{E D}$, $\{C\}$ は係数 C_{rs} に
よるベクトルである。式(6)の固有値計算には, *Housselman*
-*Ritz*法, *Jennings*法を用いた。

3. 数値計算例

二二での解析手法では, α, β, γ を各辺に与えること
により境界の境界条件を取り扱うことが出来るが, 二二
では, 相対する二辺がそれぞれ自由および単純支承され
た斜板および片持斜板の二つの場合に於いて解析を行っ
た。Table-1では, 斜角 $\phi = 0^\circ, 30^\circ$ の単純-自由支承
斜板について解の収束に与える δ -spline 関数の *spline*
次数 $(K-1)$ と要素分割 M_x, M_y の影響について表示した
ものである。同様に, Table-2では, 片持斜板の場合
について表示したものである。Table-1より, 一般に,
spline 次数を高く取ることでより, また, 要素分割数を
多くすることでより精度が向上し, 一様に収束して来る。
たとえば, $\phi = 0^\circ$ の場合には, 収束値が *Leissa* の厳密解
と一致して来る。斜角を大きくすると, 解の収束性はい
くらか悪くなるが, ほぼ収束値が得られた。しかし,
Table-II の片持斜板では, かなり収束が悪いが, 収束の
傾向が見られる。従来の *u/s* 法では, 変位関数として充
分に自由境界を満足するはりの特性関数が適用できない
ので, 級数項をあけても, 精度が得られないが, 本手法
では, さらに *spline* 次数をあけて, 要素分割数を大きくし
ることでより, 精度の向上が期待できる。また, モード
形についても, はり関数を変位関数として用いる場合には, モード形にかなり大きな誤差が見られるが, δ -*spline*
関数を用いて, モード形に肉してもよい結果が得られた。

4. おてがす。本文では, 変位関数として δ -*spline* 関数を導入することにより, 高精度の結果が得られること
を示した。一般に, 低次の δ -*spline* 関数を採用する場合に, 要素分割数を多くすることにより解の精度がさ
らに向上する。しかし, 高次数の *spline* 関数を用いた場合, ある程度分割数を多くしないと解の精度が得られない。
また, 斜角が大きくなるといくらか収束が悪くなるが, *spline* 次数, 要素分割数を大きくすることにより他の方
法に比較して安定した収束値が得られた。本数値計算は, 名大大型計算機 α -*FACOM 230-15* を使用した。

1) Kaul, R.K et al 'The natural frequencies of thin skew plates', Aeronautical Quarterly, Vol.7, 1956
pp. 337-352. 2) Schoenberg, I.J. 'Contributions to the problem of approximation of equidistant data
by analytic functions', Quart. Appl. Math. 4(1946), pp.45-99, 112-141.

Table-1 Convergence study of frequency
parameter ' μ ' of free-simply supported
skew plate with skew angle ϕ and aspect
ratio $a/b=1$.

K-1	Mx=My	1	2	3	4	5	6
3	4	0.9762	1.6355	3.732	3.970	4.760	7.212
	6	0.9759	1.6350	3.723	3.950	4.740	7.176
	8	0.9759	1.6348	3.722	3.947	4.737	7.170
4	4	0.9759	1.6348	3.722	3.948	4.735	7.170
	6	0.9759	1.6348	3.721	3.946	4.736	7.168
	8	0.9759	1.6348	3.721	3.946	4.736	7.168
5	4	0.9759	1.6348	3.721	3.946	4.736	7.168
	6	0.9759	1.6348	3.721	3.946	4.736	7.168
	8	0.9759	1.6348	3.721	3.946	4.736	7.167
6	4	0.9759	1.6348	3.721	3.946	4.736	7.167
	6	0.9759	1.6348	3.721	3.946	4.736	7.167
	8	0.9759	1.6348	3.721	3.946	4.736	7.167
Leissa'		0.9759	1.6348	3.721	3.946	4.736	7.167
$\phi=30^\circ$							

K-1	Mx=My	1	2	3	4	5	6
3	4	1.235	1.806	3.674	5.078	6.372	6.841
	6	1.232	1.799	3.655	5.023	6.252	6.674
	8	1.232	1.797	3.652	5.013	6.230	6.652
4	10	1.231	1.796	3.651	5.009	6.222	6.647
	12	1.231	1.795	3.651	5.008	6.218	6.646
	4	1.232	1.798	3.653	5.019	6.250	6.679
5	6	1.231	1.796	3.651	5.009	6.222	6.647
	8	1.231	1.795	3.651	5.007	6.217	6.645
	10	1.231	1.795	3.650	5.006	6.215	6.645
6	12	1.231	1.794	3.650	5.006	6.214	6.645
	4	1.232	1.796	3.651	5.009	6.224	6.648
	6	1.231	1.795	3.650	5.007	6.217	6.645
FEM	8	1.231	1.795	3.650	5.006	6.214	6.645
	10	1.231	1.794	3.650	5.006	6.213	6.645
	12	1.231	1.794	3.650	5.007	6.218	6.645
6	4	1.231	1.796	3.651	5.007	6.218	6.645
	6	1.231	1.795	3.650	5.006	6.214	6.645
	8	1.231	1.794	3.650	5.005	6.213	6.645
	9	1.231	1.794	3.650	5.005	6.212	6.645
FEM		1.249	1.831	3.665	5.191		

Table-2 Convergence study of frequency
parameter ' μ ' of cantilever skew plate
with skew angle $\phi=0^\circ$ and aspect ratio
 $a/b=1.0$.

K-1	Mx=My	1	2	3	4	5	6
3	4	0.3463	0.8415	2.110	2.763	3.066	5.426
	6	0.3498	0.8505	2.132	2.755	3.094	5.435
	8	0.3508	0.8549	2.142	2.755	3.109	5.450
4	10	0.3512	0.8572	2.147	2.755	3.118	5.461
	12	0.3514	0.8586	2.145	2.755	3.123	5.468
	4	0.3444	0.8320	2.087	2.755	3.022	5.358
5	6	0.3490	0.8460	2.121	2.753	3.074	5.403
	8	0.3504	0.8522	2.136	2.753	3.098	5.431
	10	0.3510	0.8554	2.143	2.754	3.110	5.448
6	12	0.3513	0.8574	2.147	2.754	3.118	5.459
	4	0.3437	0.8282	2.074	2.751	3.007	5.297
	6	0.3488	0.8441	2.117	2.752	3.067	5.384
FEM	8	0.3504	0.8512	2.134	2.753	3.093	5.421
	10	0.3510	0.8548	2.142	2.753	3.108	5.442
	4	0.3426	0.8141	2.063	2.752	2.954	5.279
Ritz	6	0.3484	0.8389	2.111	2.752	3.046	5.366
	8	0.3501	0.8485	2.130	2.752	3.083	5.409
	9	0.3505	0.8518	2.134	2.753	3.096	5.420
FEM		0.3540	0.8660	2.172	2.782	3.158 (18 teams)	
		0.3519	0.8633	2.182			