I-38　　重直交関係による板の曲げ解析

信州大学大学院　学生員 ○沢 島 守 夫
信州大学工学部　正 員　谷 本 勉之助
信州大学工学部　正 員　夏 目 正太郎

1．まえがき

板の曲げ解析について，著者らは 支配微分方程式を 固有値展開して，固有関数に含まれる無限個の複素固有値展開係数の決定は，Gaydon と Shepherd によって開発された再直交関係によっていた。しかし ここで Johnson や Little によって開発された 重直交関係を 半無限板の解析に応用することを試みた。 当手法によれば 短辺には 考えうるすべての物理的境界条件を とりこめるばかりか 境界関数を展開することなしに，複素展開係数を直接的に決定できる利点がある。

この手法の操作上の特徴は，4階偏微分方程式を 1階偏微分方程式系に置換し 重直交ベクトルを導くところにある．

2．解析の概要

$|y| \leq 1$，$x \geq 0$，の領域をもち，長辺が 固定支持され 短辺に任意の境界条件が 付加されている場合について考える．ここで 次のような変換を行なえば 4階の支配微分方程式と等価な 4連の1階微分方程式系が導ける．

$$f^{(1)}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\qquad f^{(2)}=\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\qquad f^{(3)}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$ とおけば

$$\frac{\partial \mathbb{f}}{\partial y} + \mathbb{U}\cdot\frac{\partial \mathbb{f}}{\partial x} = 0. \quad \text{ここで}\quad \mathbb{f}=\begin{bmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ f^{(3)} \\ f^{(4)} \end{bmatrix},\quad \mathbb{U}_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \\ -\alpha\beta & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix},\ \mathbb{U}_2=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \\ -\alpha\beta & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで $\mathbb{U}_1$は、直交異方性板の場合であり　$\alpha+\beta = 2H/D_y$，　$\alpha\beta = D_x/D_y$,である． $\mathbb{U}_2$は、等方性板の場合である．さて、ベクトル関数 $\mathbb{f}$ が 次の形で展開できるものと仮定する．

$$\mathbb{f} = \sum_n c_n \mathbb{Z}_n e^{\lambda_n x} \qquad (\text{ここで}\ \lambda_n\ \text{は}\ n\ \text{次固有値})$$

この式を 上式に代入すると;

$$\mathbb{Z}_n' + \lambda_n \mathbb{U}\cdot\mathbb{Z}_n = 0.$$

ここで 次のようなベクトル微分方程式を 導入すると，

$$\mathbb{W}_m' - \lambda_m^{*} \mathbb{U}^{+}\mathbb{W} = 0.$$

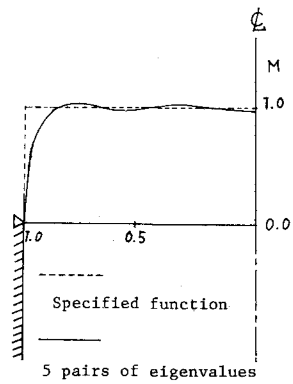
（ ＊は，共役複素数 ， ＋は，共役転置マトリクスを表わす）

欲していた重直交関係

$$\int_{-1}^{+1} (\mathbb{W}_m^{+}\cdot\mathbb{U}\cdot\mathbb{Z}_n)\,dy = 0.$$

が 得られる．そこで $x=0$ 辺における 境界条件を $\mathbb{f}_b$とし，重直交関係を用いれば，複素展開係数 C_nが 決定される．

$$C_n = K_n^{-1}\int_{-1}^{+1} (\mathbb{W}_n^{+}\mathbb{U}\cdot\mathbb{f}_b)\,dy.$$



3．数値計算

一例として，右図に 短辺が 単純支持，等分布モーメントが 加わっている 場合における $x=0$ 端での， 曲げモーメント分布を 示す。

〈参考文献〉　M.W JOHNSON and R.W.LITTLE, Q.J.appl.Math.22,335 (1964).