

大阪工業大学

正員 岡村 宏一

東洋技研コンサルタント

正員 〇島田 功

1. まえがき; 筆者は、別報¹⁾で境界表面が (a) 自由な、半無限軸対称異方性体の解析解を提示した。同様な手法により、境界表面が (b) 固定の場合に於いての解析解も求めることができる。これらの半無限領域問題の解は、無限体の特解 (集中力問題の解) と 1 つの境界面を作るために設けた 3 つの特異点 (境界面に対する鏡像点) を持つ解と組合わせることにより導き出されたものである。本報告は、この手法を、板の上下面に適用し、特解とその鏡像点を持つ解の集合として、相対する 2 つの境界表面 (自由または固定) を持つ問題を解析し考察したものである。その一部に於いては、すでに別報²⁾に示した。

2. 半無限異方性体の解析解; 図-1 (a) の軸対称異方性体の応力-ひずみマトリックス及び基礎方程式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_{11} \varepsilon - 2 a_{44} \varepsilon_y - (a_{13} - a_{11}) \varepsilon_z, & \tau_{xy} &= a_{44} \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= a_{11} \varepsilon - 2 a_{44} \varepsilon_x - (a_{13} - a_{11}) \varepsilon_z, & \tau_{yz} &= a_{55} \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= a_{13} \varepsilon - (a_{33} - a_{11}) \varepsilon_z, & \tau_{zx} &= a_{55} \gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \text{--- (1)}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi_i = 0 \text{ --- (2)} \quad (i=1,2,3)$$

$$\chi_i = e + g \frac{\partial w}{\partial z} \quad (i=1,2) \quad \chi_3 = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\delta_i = \{ a_{55} + P_i (a_{13} + a_{55}) \} / a_{11} \quad (i=1,2), \quad \delta_3 = a_{55} / a_{44}, \quad P_i = (a_{55} + a_{13} - a_{11} + P_i a_{55}) / a_{11} \quad (i=1,2)$$

$$P_1, P_2 = \frac{1}{2 a_{55} (a_{13} + a_{55})} \left\{ a_{11} a_{33} - a_{13}^2 \pm \sqrt{(a_{11} a_{33} - a_{13}^2)^2 - 4 (a_{11} a_{33} - a_{13}^2) (a_{13} - a_{55}) a_{55}} \right\} - 1$$

表 (1) 基礎方程式 (2) の解と積分定数

		Z 軸方向の単一集中力 ($\chi_3 = 0$)		x 軸方向の単一集中力		
式 (2) の解		$\chi_1^j = A_1^j \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1^j} \right)$	$\chi_2^j = A_2^j \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_2^j} \right)$	$\chi_1^j = B_1^j \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_1^j} \right)$	$\chi_2^j = B_2^j \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_2^j} \right)$	$\chi_3^j = B_3^j \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_2^j} \right)$
無限体の解 $\chi_i = \chi_i^0$		$A_1^0 \frac{P_1 \sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1)}{4\pi a_{33}}$	$\frac{P_2 \sqrt{\delta_2} (1 - \delta_2)}{4\pi a_{33}}$	$B_1^0 \frac{T_1 \sqrt{\delta_1} \delta_2 (1 - \delta_2)}{4\pi \alpha \delta_1 \beta \delta_2}$	$\frac{T_1 \sqrt{\delta_1} \delta_2 (1 - \delta_2)}{4\pi \alpha \delta_1 + \beta \delta_2}$	$\frac{T_1 \sqrt{\delta_3}}{4\pi \alpha}$
半無限体の解 $\chi_i = \chi_i^0 + \chi_i^j$	境界で応力が零	$A_1^1 \frac{\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2}} \times A_1^0$	$-\frac{\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2}} \times A_2^0$	$B_1^1 - \frac{\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2}} \times B_1^0$	$\frac{\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2}} \times B_2^0$	B_3^0
		A_1^2	0	B_1^2	0	0
		$A_1^3 \frac{\alpha \delta_1}{\beta \sqrt{\delta_2}} \times \frac{2}{\sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2}} \times A_2^0$	0	$B_1^3 - \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{2\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2}} \times B_2^0$	0	0
	境界で変位が零	$A_1^1 - \frac{\sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1) + \sqrt{\delta_2} (1 + \delta_2)}{\sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1) - \sqrt{\delta_2} (1 + \delta_2)} \times A_1^0$	$\frac{\sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1) + \sqrt{\delta_2} (1 + \delta_2)}{\sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1) - \sqrt{\delta_2} (1 + \delta_2)} \times A_2^0$	$B_1^1 \frac{\sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1) + \sqrt{\delta_2} (1 + \delta_2)}{\sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1) - \sqrt{\delta_2} (1 + \delta_2)}$	$\frac{\sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1) + \sqrt{\delta_2} (1 + \delta_2)}{\sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1) - \sqrt{\delta_2} (1 + \delta_2)} \times B_2^0$	$-B_3^0$
		A_1^2	0	B_1^2	0	0
		$A_1^3 \frac{2\sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1)}{\sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1) - \sqrt{\delta_2} (1 + \delta_2)} \times A_2^0$	0	$B_1^3 \frac{2\sqrt{\delta_2} (1 + \delta_1)}{\sqrt{\delta_1} (1 + \delta_1) - \sqrt{\delta_2} (1 + \delta_2)} \times B_2^0$	0	0

$$\text{ただし } \alpha = a_{33} - (1 + \delta_1) a_{13}, \quad \beta = -a_{33} - (1 - \delta_2) a_{13}$$

$$r_i^j = \left\{ x^2 + y^2 + \frac{(z - d_i^j)^2}{\delta_i^j} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad j = 0, 1, 2, 3 \text{ はそれぞれ特異点の指標}$$

$$(d^0 = d, d^1 = -d, d^2 = -\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}} d, d^3 = -\sqrt{\frac{\delta_3}{\delta_2}} d)$$

1) 岡村, 島田; 内部に集中力を受ける半無限異方性体の解析解, 第 21 回土木学会講演概要 I, S. 51

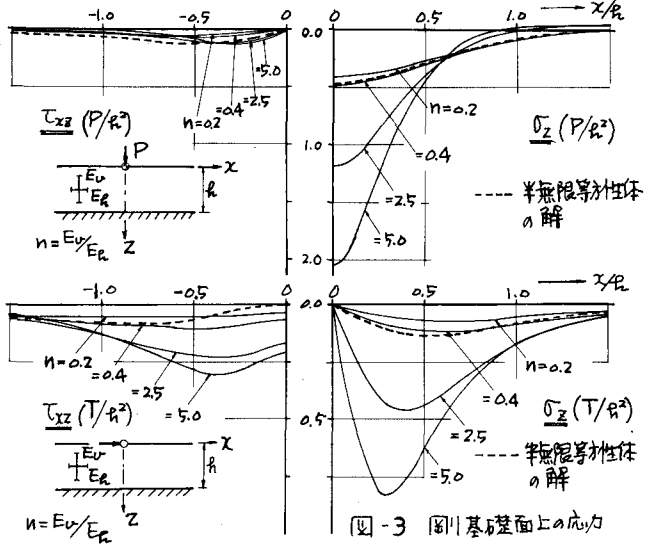
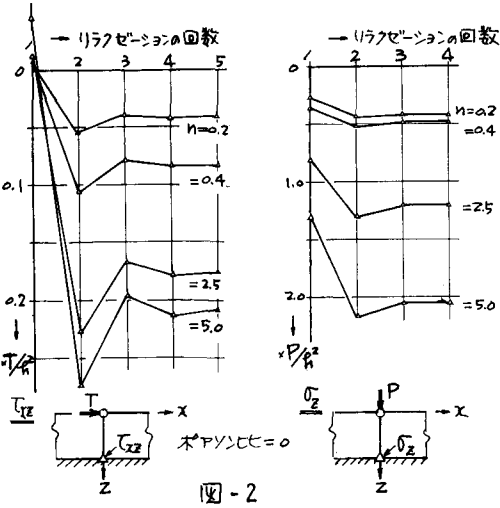
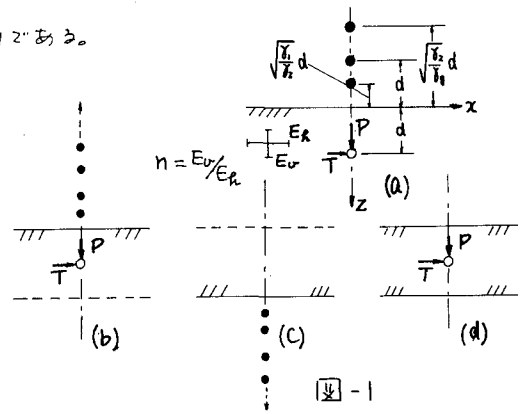
2) 岡村, 島田; 異方性板の三次元解析, 土木学会関西支部講演概要, S. 52

各変位式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1+\nu_2}{(\nu_1-\nu_2)\gamma_1} \frac{\partial}{\partial x} \iint \xi_1 dz dz + \frac{1+\nu_1}{(\nu_2-\nu_1)\gamma_2} \frac{\partial}{\partial x} \iint \xi_2 dz dz - \frac{1}{\gamma_3} \frac{\partial}{\partial y} \iint \xi_3 dz dz \\ v &= \frac{1+\nu_2}{(\nu_1-\nu_2)\gamma_1} \frac{\partial}{\partial y} \iint \xi_1 dz dz + \frac{1+\nu_1}{(\nu_2-\nu_1)\gamma_2} \frac{\partial}{\partial y} \iint \xi_2 dz dz + \frac{1}{\gamma_3} \frac{\partial}{\partial x} \iint \xi_3 dz dz \\ w &= \frac{1}{\nu_1-\nu_2} \int \xi_1 dz + \frac{1}{\nu_2-\nu_1} \int \xi_2 dz \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

表-1は、集中力問題に対する式(2)の解をまとめたものである。

3. 解法： まず、荷重を含む半無限領域の解を特解として与え、F₁面の境界を作る。次に、これらの特異点に対するF₂面の鏡像点を設け、F₂面の境界を作る解を重ねる。この解により、F₁面の境界条件は満たされ、再び、前出の特異点に対するF₁面の鏡像点を設け、F₁面の境界条件を満足させる。このように、1つの面の境界条件を満足させるために設けた特異点を持つ解による他面への乱れを打消す過程を図-1(b),(c)に示すように板の上下面で交互に繰返す。このような境界調整の手法により、特異点は板から次第に離れて行き、板内の応力を収束させることができる。



4. 計算例： まず、表面荷重を受ける剛基礎上の板の解析例を図-2, 3に示した。図-2はリラクゼーションの回数と応力の収束状態を、4種類の垂直-水平方向のヤング率比に対して示したもので、4回程度の繰返しで、ほぼ収束している。図-3は、異方性の変化による剛基礎面上の応力値を示し、半無限等方性体の場合(破線)と比較したものである。次に図-4は、内部に水平力Tを受ける無限板の解析例で、水平方向のヤング率が大きくなると、板厚離れた断面②においても、応力は非線形な分布を呈する。

