

室蘭工業大学工学部	正員	○中村作太郎
室蘭工業大学工学部	正員	松岡 健一
太平工業株式会社	正員	利波 敏彦

1. 緒 論

最近土木工学の分野における鋼管の利用には著しいものがあり、輸送管・基礎杭・橋梁・その他の塔状構造物などをあげることが出来ると思う。しかしその理論解析上からみて不明の点が多く、今後の研究に期待すべき問題が種々あるので、これらの点を追求・開発して行かなければならない。

その一つとして薄肉円管桁の曲げ理論解析の問題があり、これについて研究を試みた一端について述べることにする。元来薄肉円管桁の応力解析は非常に難しく、定型化されておらず、厳密に取扱った論文はきわめて少なく、円筒殻の曲げ理論から出発してある仮定の基で近似的に取纏めたものが多い。

薄肉円管桁の曲げ理論については、P. P. Bijlaard, S. W. Yuan and L. Ting, J. Kempner, N. J. Hoff, L. S. D. Morley などの諸氏により論文がかなり発表されているが、これらの解析法は特殊な問題として取扱われたもので、厳密な意味における一般解にはならない。

これらの論文に比較し、1961年に H. R. Meek 氏が“Journal of Applied Mechanics”に発表した論文は、短い円筒殻、長い円筒、更に任意の長さを有する円筒それぞれについて、従来のものよりも厳密な曲げ理論を展開しているので、この理論に基づき任意の長さを有する単純支持の薄肉円管桁の応力解析を試み、円管の平均半径と支間長との比、肉厚と円管の平均半径との比の変化による応力度分布 (σ_x , σ_θ) の変化を無次元化表示により明かならしめた。(基本式は L. H. Donnell の式より出発したもの)

2. 薄肉円管桁の基礎微分方程式と級数による一般解法

薄肉円管桁の基礎微分方程式は次式の通りである。

$$\nabla^4 w + \frac{2}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\nabla^4 p}{D} \quad (1)$$

$$\text{曲げモーメント解式} \quad M_x = D(K_x + \nu K_\theta), \quad M_\theta = D(K_\theta + \nu K_x) \quad (2)$$

$$\text{曲げ応力度解式} \quad \sigma_x = \frac{6 M_x}{h^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{6 M_\theta}{h^2} \quad (3)$$

$$\text{ここに,} \quad K_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad K_\theta = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \quad (4)$$

上述の式における記号を示せば、 a : 円管の平均半径、 h : 厚さ、 L : 支間、 x : 軸方向の座標、 θ : 円周方向の座標(角度)、 P : 最大線荷重、 p : 分布荷重、 M : 単位長当りの曲げモーメント、 N : 単位長当りの膜力、 E : 弾性係数、 ν : ポアソン比、 u : 軸方向変位、 v : 円周方向変位、 w : 中心方向変位(外側正)、 K : 曲率、 σ : 応力度、 m : 軸方向曲げの Lobes 数、 n : 円周方向曲げの Lobes 数、 D : 曲げ剛性 $= E h^3 / 12(1-\nu^2)$ 、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 。

円筒殻は図-1 に示されるように中央 ($x=0$) に $P \cos n\theta$ を受けているとする。いま単純支持の場合について取扱えば、単純支持の境界条件は $x = \pm L/2$; $w = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ (5)

(5)式の境界条件を満足する(1)式のたわみ w の一般形として、次のようにフーリエ級数の形で表わされるとして考える。

$$w = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} A_m \cos \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta \quad (6)$$

$$\text{荷重を表わすフーリエ級数 } p \text{ は, } p = \sum_{m=1,3}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta \quad (7)$$

(7)式中の任意の項のフーリエ係数 a_m は、

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} p \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{2p}{L}$$
 によって求めることが出来る。

次に(6)、(7)の面式を(1)式に代入して係数 A_m を求めれば、

$$A_m = \frac{1}{D} \frac{\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2}\right) a_m}{\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2}\right) + \frac{n^2 - 2n^4}{a^8} + \frac{12(1-\nu^2)m^4}{a^2 h^2 (L^2)}}$$

となり、たわみ w は次式の通りとなる。

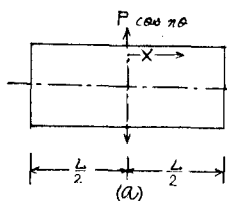
$$w = \frac{2p}{DL} \cos n\theta \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2}\right) \cos \frac{m\pi x}{L}}{\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2}\right) + \frac{n^2 - 2n^4}{a^8} + \frac{12(1-\nu^2)m^4}{a^2 h^2 (L^2)}} \quad (8)$$

また曲率は次の式によって表示出来る。

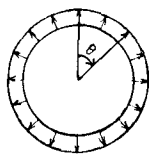
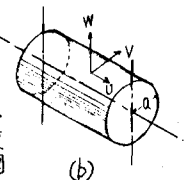
$$K_x = -\frac{2p}{DL} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2}\right) \cos \frac{m\pi x}{L}}{\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2}\right) + \frac{n^2 - 2n^4}{a^8} + \frac{12(1-\nu^2)m^4}{a^2 h^2 (L^2)}} \quad (9)$$

$$K_\theta = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) = -\frac{n^2 - 1}{a^2} w \quad (10)$$

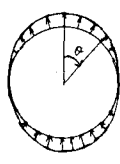
曲げモーメントは(2)式と(7)および(10)式より得られる
 し、曲げ応力度は(3)式と(11)および(2)式より求められる。



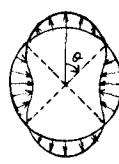
円周に沿った線荷重を受ける薄肉円管桁の曲げ理論解析に用いた座標と荷重状態に関する図



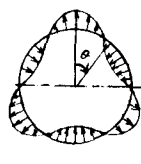
$n=0$



$n=1$



$n=2$



$n=3$

図-1 薄肉円管桁の座標と円周の周りの種々の荷重状態

$$M_x = -\frac{2p}{L} \cos n\theta \sum_{m=1,3}^{\infty} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2 - 1}{a^2} \right) \frac{\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \cos \frac{m\pi x}{L}}{\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) + \frac{n^2 - 2n^4}{a^8} + \frac{12(1-\nu^2)m^4}{a^2 h^2 (L^2)}} \quad (11)$$

$$M_\theta = -\frac{2p}{L} \cos n\theta \sum_{m=1,3}^{\infty} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2 - 1}{a^2} \right) \frac{\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \cos \frac{m\pi x}{L}}{\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) + \frac{n^2 - 2n^4}{a^8} + \frac{12(1-\nu^2)m^4}{a^2 h^2 (L^2)}} \quad (12)$$

3. 任意の長さの薄肉円管桁の応力解析

円管桁が非常に短いまたは非常に長い場合は $L/a \ll 1$ or $\gg 1$ を考慮し、(1)式の8階微分方程式を4次の微分方程式に変換し、閉合形に表わせるが、それ以外の長さの場合すなわち任意の長さの円管桁の場合には適用出来ない。そこで任意の長さの円管桁の解として次式を仮定する。

$$w = C e^{\psi(x/a)} \cos n\theta \quad (13)$$

$$\text{この形の解を(1)式に代入すると } (p=0), \quad \left(\frac{\psi^2}{a^2} - \frac{n^2}{a^2} \right)^4 w - 2 \frac{n^6}{a^8} w + \frac{n^4}{a^8} w + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 h^2} \psi^4 w = 0$$

$$\therefore (\psi^2 - n^2)^4 + 4\lambda^4 \psi^4 - 2n^6 + n^4 = 0, \quad \lambda = \alpha a \quad (14)$$

(14)式の ψ に関する代数方程式は λ^4 が非常に大きな数であるから4つの非常に大きな根と4つの非常に小さな根を有することがわかる。

$$\text{大きな根の場合} \quad \psi^4 + 4\lambda^4 \approx 0 \quad (15)$$

$$\text{小さい根の場合} \quad 4\lambda^4 \psi^4 + n^4(n^2 - 1)^2 \approx 0 \quad (16)$$

$$(15), (16) \text{式を解いて(13)式に代入すると、たわみ } w \text{ が次のように求まる。} \quad w = w_1 + w_2 \quad (17)$$

$$w = w_1 + w_2 = (A_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + A_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + A_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + A_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + B_1 e^{\beta x} \cos \beta x + B_2 e^{\beta x} \sin \beta x + B_3 e^{-\beta x} \cos \beta x + B_4 e^{-\beta x} \sin \beta x) \cos n\theta \quad (18)$$

(18)式が任意の長さの円管桁のたわみ w を表わす式であるが、式中の定数 A, B は各々非常に短い場合と非常に長い場合で定義したものと同じである。従つて任意の長さの円管桁の場合の解は短円管、長円管として考えた解の加算によつて表わされることがわかる。

そこで、 $n=0, n=1, n \geq 2$ のそれぞれの場合における w, K_x, K_θ の解式を誘導し、計算に用いた。また曲げモーメント、曲げ応力度は(2)、(3)式と各々の関係式を用いることにより求まる。

計算では管の平均半径 a を1.0とし肉厚 h 、支間 L を a との比で表わし、無次元化して行なつた。なお、荷重 P 、弾性係数 E を1.0、ポアソン比を0.3として求めたことを付記する。

4. 総括

L/a を2, 4, 6, 8, 10, a/h を10, 20, 40と変化させて σ_x, σ_θ の分布図(グラフでは、 $h\sigma_x/p, h\sigma_\theta/p$)を求めたが、色々と興味深い応力特性を見出したので詳細については当日発表する。