I-26　初期ねじれを有する薄肉開断面桁の解析

鳥取大学大学院　学生員　是沢 元博
広 島 県　　乗政 俊弘
鳥 取 大 学　正 員　神部 俊一

1. まえがき

横断勾配が除々に変化する梁、即ち初期ねじれ率を有する梁に関する研究に文献(1)があるが、解法は与えられていない。ここでは、簡単のために直線片持ち梁を取り上げる。それは、片持ち梁が片持ち式工法で梁を架設する際の1つの理想化された状態であると考えることができ、しかも境界条件が簡単で支配方程式を解き易いという利点を有するからである。そこで、境界値問題を初期値問題に変換する手法を用いて数値積分により支配方程式を解き、初期ねじれ率の影響を明らかにするのが本報告の目的である。

2. 仮定と座標系

平衡方程式は、次の仮定のもとで導かれている。

①変形は微小である。②Euler-Bernoulli の平面保持の仮説に基づく変位と St. Venant のそり変位との合成によって桁断面の変位場が表される。③初期ねじれ率 $(d\psi/dx_3)$ は、断面の最大寸法 (a) に比べて十分小さく次の関係が成り立つ。$a^2(d\psi/dx_3)^2 \ll 1$ ④桁の構成要素である薄板の中央面上のせん断ひずみは、存在しない。

本報告に使用する座標系は、次の2種類である。①断面の図心を連ねた図心軸に沿って x_3 軸，これに垂直な断面内に x_3 軸と右手系をなし、しかも断面に固定された x_1, x_2 軸から成る (x_1, x_2, x_3) 座標系。②断面の肉厚中央面に沿って s 軸、これと垂に n 軸を x_3 軸と右手系をなすように定めた (s, n, x_3) 座標系。

3. 断断面の変位場およびひずみ成分

仮定②より、断面内任意点の x_1, x_2, x_3 軸方向変位 u_1, u_2, u_3 は、次式で表される。

$$u_1 = u(x_3) - (x_2 - a_2)\theta_3(x_3), \quad u_2 = v(x_3) + (x_1 - a_1)\theta_3(x_3), \quad u_3 = w(x_3) - x_1\theta_2(x_3) + x_2\theta_1(x_3) + \phi(x_1, x_2)\theta(x_3) \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，u, v, w；せん断中心の x_1, x_2, x_3 軸方向の変位，θ_1, θ_2：x_1, x_2 軸回りの回転角，θ_3：せん断中心軸回りのねじり角，θ：そりの大きさの程度を示すある未知の関数，ϕ：St. Venant のそり関数，a_1, a_2：せん断中心の座標成分を表す。

仮定④より，次の付帯条件式を得る。以下において，$(\ )'$ は $d(\ )/dx_3$ を意味する。

$$\alpha_1 = -\theta_2 + u' - \psi'(v - a_1\theta_3) = 0, \quad \alpha_2 = \theta_1 + v' + \psi'(u + a_2\theta_3) = 0, \quad \alpha_3 + \theta = \theta_3' + \theta = 0 \quad \cdots\cdots(2)$$

さらに、ひずみ成分は次のようになる。

$$2\epsilon_{31} = \{\partial\phi/\partial x_1 + (x_2 - a_2)\}\theta, \quad 2\epsilon_{32} = \{\partial\phi/\partial x_2 - (x_1 - a_1)\}\theta$$
$$\epsilon_{33} = w' + \phi\theta' - x_1(\theta_2' - \psi'\theta_1) + x_2(\theta_1' + \psi'\theta_2) - \psi'\theta\{x_1(x_1 - a_1) + x_2(x_2 - a_2)\} \quad \cdots\cdots(3)$$

4. 平衡方程式

断断面に作用している直応力の合力として次に示す断面力を定義する。

$$N = \iint_A \sigma_{33}\,dx_1 dx_2 = EA\{w' - \psi'\theta\gamma_0\}, \quad M_1 = \iint_A \sigma_{33} x_2\,dx_1 dx_2 = EI_{x_1}\{\theta_1' + \psi'\theta_2 - \psi'\theta\gamma_1\}$$
$$-M_2 = \iint_A \sigma_{33} x_1\,dx_1 dx_2 = EI_{x_2}\{\theta_2' - \psi'\theta_1 - \psi'\theta\gamma_2\}, \quad B = \iint_A \sigma_{33}\phi\,dx_1 dx_2 = EI_\phi\{\theta' - \psi'\theta\gamma_3\} \quad \cdots\cdots(4)$$

式中、$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ は、次式で定義される断面定数である。

$$\gamma_0 = (I_{x_1} + I_{x_2})/A, \quad \gamma_1 = \iint_A x_2(x_1^2 + x_2^2)\,dA/I_{x_1} - a_2, \quad \gamma_2 = \iint_A x_1(x_1^2 + x_2^2)\,dA/I_{x_2} - a_1, \quad \gamma_3 = \iint_A \phi(x_1^2 + x_2^2)\,dA/I_\phi$$

梁に作用する外力には次の荷重を考える。① x_1, x_2, x_3 軸方向に作用する体積力 p_1, p_2, p_3。②梁の両端断面に作用する x_1, x_2, x_3 軸方向の表面力 f_1, f_2, f_3。付帯条件に留意し，Lagrange 乗数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を導入すると、仮想仕事の原理は次のように表すことができる[2]。k は、$x=0, \ell$ の断面においてそれぞれ $-1, 1$ の値を取るものとする。

$$\iiint_V (\sigma_{33}\delta\epsilon_{33} + 2\sigma_{31}\delta\epsilon_{31} + 2\sigma_{32}\delta\epsilon_{32})dx_1dx_2dx_3 - \iiint_V (p_1\delta u_1 + p_2\delta u_2 + p_3\delta u_3)dx_1dx_2dx_3$$
$$-k\left[\iint_A (f_1\delta u_1 + f_2\delta u_2 + f_3\delta u_3)dx_1dx_2\right]_0^l + \int_0^l \{\lambda_1\delta\alpha_1 + \lambda_2\delta\alpha_2 + \lambda_3\delta(\alpha_3+\theta)\}dx_3 = 0 \quad \cdots\cdots(5)$$

式(1)~(4)を用い、上式を部分積分すると次の平衡方程式と境界条件が得られる。

(平衡方程式)

$$\lambda_1' - \psi'\lambda_2 + p_1^* = 0, \quad \lambda_2' + \psi'\lambda_1 + p_2^* = 0, \quad N' + p_3^* = 0, \quad M_1' - \psi' M_2 - \lambda_2 + m_1 = 0$$
$$M_2' + \psi' M_1 + \lambda_1 + m_2 = 0, \quad \lambda_3' - \psi'(a_1\theta_1 + a_2\theta_2) + m_3 = 0, \quad B' - \lambda_3 + \psi' T_\psi + T_{sv} + b = 0 \quad \cdots(6)$$

(境界条件) 固定端($x=0$)において強制境界条件を

$$u = v = w = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta = 0 \quad \cdots\cdots(7)$$

に定めると、自由端($x=l$)において次の自然境界条件が成り立つ。

$$\lambda_1 = f_1^*, \quad \lambda_2 = f_2^*, \quad N = f_3^*, \quad M_1 = m_1^*, \quad M_2 = m_2^*, \quad \lambda_3 = m_3^*, \quad B = b^*$$

ここに、

$$p_1^* = \iint_A p_1 dx_1dx_2, \quad p_2^* = \iint_A p_2 dx_1dx_2, \quad p_3^* = \iint_A p_3 dx_1dx_2, \quad m_1 = \iint_A p_3 x_2 dx_1dx_2$$
$$-m_2 = \iint_A p_3 x_1 dx_1dx_2, \quad m_3 = \iint_A \{p_2(x_1-a_1) - p_1(x_2-a_2)\}dx_1dx_2, \quad b = \iint_A p_3\phi dx_1dx_2$$
$$T_\psi = \iint_A \sigma_{33}\{x_1(x_1-a_1) + x_2(x_2-a_2)\}dx_1dx_2, \quad -T_{sv} = \iint_A \left[\sigma_{31}\{\partial\phi/\partial x_1 + (x_2-a_2)\} + \sigma_{32}\{\partial\phi/\partial x_2 - (x_1-a_1)\}\right]dx_1dx_2$$
$$f_1^* = \iint_A f_1 dx_1dx_2, \quad f_2^* = \iint_A f_2 dx_1dx_2, \quad f_3^* = \iint_A f_3 dx_1dx_2, \quad m_1^* = \iint_A f_3 x_2 dx_1dx_2$$
$$-m_2^* = \iint_A f_3 x_1 dx_1dx_2, \quad m_3^* = \iint_A \{f_2(x_1-a_1) - f_1(x_2-a_2)\}dx_1dx_2, \quad b^* = \iint_A f_3\phi dx_1dx_2$$

5. 数値計算法

本問題は境界条件式(7)のもとで付帯条件式(2)構成方程式(4)ならびに平衡方程式(6)を連立させて解く境界値問題になる。本報告では、この境界値問題の初期値問題への変換[3]を行い、上述の連立一階常微分方程式を数値積分法の一種である Runge-Kutta-Gill 法を用いて解く。以下、簡単に解法手順を示す。

式(7)を見るとわかるように、断面力($\lambda_1, \lambda_2, \cdots, B$)の $x=0$ での初期値は不明であり、これらは他端での自然境界条件を満足するように選定されなければならない。まず、断面力の初期値をすべて0と置き、荷重項を考慮に入れた非同次の連立方程式を図心軸に沿って $x=0$ から $x=l$ まで数値積分して得る特解を $\lambda_{1,0}(l), \lambda_{2,0}(l), \cdots\cdots, B_0(l)$ とする。次に、これら断面力の初期値のうち1つだけを1と置き、荷重項を除いた同次方程式を数値積分して得る解を $\lambda_{1,1}(l), \lambda_{2,1}(l), \cdots\cdots, B_1(l)$ とする。順次残りの断面力の初期値を1つづつ1とおき残りの断面力の初期値を0とした状態で数値積分をして得る解をそれぞれ $\lambda_{1,i}(l), \lambda_{2,i}(l), \cdots\cdots, B_i(l)$ とする。このようにして得た余関数の線型結合と特解の和を $x=l$ での境界条件と等置すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(l) \\ \lambda_2(l) \\ N(l) \\ M_1(l) \\ M_2(l) \\ \lambda_3(l) \\ B(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1}(l) & \lambda_{1,2}(l) & \lambda_{1,3}(l) & \lambda_{1,4}(l) & A_1 \\ \lambda_{2,1}(l) & \lambda_{2,2}(l) & \lambda_{2,3}(l) & \lambda_{2,4}(l) & A_2 \\ N_1(l) & N_2(l) & N_3(l) & N_4(l) & A_3 \\ M_{1,1}(l) & M_{1,2}(l) & M_{1,3}(l) & M_{1,4}(l) & A_4 \\ M_{2,1}(l) & M_{2,2}(l) & M_{2,3}(l) & M_{2,4}(l) & A_5 \\ \lambda_{3,1}(l) & \lambda_{3,2}(l) & \lambda_{3,3}(l) & \lambda_{3,4}(l) & A_6 \\ B_1(l) & B_2(l) & B_3(l) & B_4(l) & A_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{1,0}(l) \\ \lambda_{2,0}(l) \\ N_0(l) \\ M_{1,0}(l) \\ M_{2,0}(l) \\ \lambda_{3,0}(l) \\ B_0(l) \end{bmatrix} \quad \cdots(8)$$

これを A_i について解くと、断面力の初期値 $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \cdots B(0)$ がそれぞれ $A_1, A_2, \cdots, A_7$ として求まる。このようにしてすべての初期値が求まると、これらを用いて非同次の連立方程式を数値積分して解くことができる。なお、計算結果は、一部得ているが紙面の都合上割愛する。取りまとめて講演当日発表する予定である。

(参考文献)

(1) A.I.Soler: "Pretwisted Curved Beams of Thin-Walled Open Section", J. of Appl. Mech., 1972.

(2) K.Washizu: "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, 1968.

(3) A.M.Ebner & D.P.Billington: "Steady State Vibration of Damped Timoshenko Beams", Vol.94, ST3, 1968.