

川崎重工業(株) 正員 ○長井 正嗣

〃 〃 坂井 藤一

1. まえがき

先に著者らは薄肉直線箱析について、箱析の構造問題である1)、断面変形の問題、2)、せん断遅れの問題、3)、荷重分布の問題等を比較的簡便にかつより実橋に近い形で解析する有限要素法(ブロック有限要素法)¹⁾を提案した。ここでは、まず一般化座標法の助けをかりて断面変形、せん断変形を含む梁理論より若干高度な常微分方程式を導いた。次にこの解法として有限要素法を適用した。これは有限要素法の特長境界条件、不連続構造等の取り扱いが任意であるという利点を利用したものである。

本論文は薄肉曲線箱析(張出し、リブ付一室断面に限って)について同様の手法を適用した報告を行うものである。この際、曲線座標系における有限要素剛性マトリックス導出に関する問題点(変位関数)についての考察も加えている。曲線箱析橋の断面変形の問題はダイヤフラムの設計法と関連して重要な問題であるが、いまだ十分に解明されていない問題でもある。本報告はその意味でも意義のあるものと思われる。

2. 曲線箱析の基礎方程式

1) 仮定条件—図-1に示す断面形状を設定し、軸方向に α 座標(変位を u とする。)、輪郭線方向に ρ 座標(フランジ部では r 、腹板部では s 座標に対応する。また、 ρ 方向変位を u_ρ 、 ρ 方向と直角方向変位を u_n とする。)を設定する。ひずみを $\{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\rho, \varepsilon_{\alpha\rho}\}$ 、応力を $\{\sigma_\alpha, \sigma_\rho, \tau_{\alpha\rho}\}$ とする。ここで、本解法では、1) $\varepsilon_\rho = 0$ 、2) ポアソン比 $= 0$ 、3) 梁理論の成立、4) リブは線剛性のものを考える。を理論前提条件として設定する。こうすると、変位—ひずみの関係は、i) フランジ部で、 $\varepsilon_\alpha = u'/r + u_\rho'/r$ 、 $\varepsilon_{\alpha\rho} = \dot{u} - u'/r + u_\rho'/r$ 、ii) 腹板部で、 $\varepsilon_\alpha = u'/r + u_n'/r$ 、 $\varepsilon_{\alpha\rho} = \dot{u} + u_\rho'/r$ となり、応力—ひずみの関係は、 $\sigma_\alpha = E \varepsilon_\alpha$ 、 $\tau_{\alpha\rho} = G \varepsilon_{\alpha\rho}$ となる。ここで、 $(\dot{})$ はそれぞれ α 、 ρ に関する一階微分である。 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数である。次に変位 u 、 u_ρ 、 u_n を次のように仮定する。 $u(\alpha, s) = \sum_j \phi_j^{(i)}(s) \cdot U_j(\alpha)$ 、 $u_\rho(\alpha, s) = \sum_j \psi_j^{(i)}(s) \cdot V_j(\alpha)$ 、 $u_n(\alpha, s) = \sum_j \chi_j^{(i)}(s) \cdot V_j(\alpha)$ 。ここで、 $\phi_j^{(i)}$ 、 $\psi_j^{(i)}$ 、 $\chi_j^{(i)}$ は一般化座標で図-2に示すものである。また、 $U_j(\alpha)$ 、 $V_j(\alpha)$ は一般化変位である。

2) 仮想仕事の原理の適用—微小片 $d\alpha$ について仮想仕事の原理を適用すると以下の式を得る。

$$\oint \sigma_\alpha \phi_j^{(i)} dF - \oint_F \tau_{\alpha\rho} (\dot{\phi}_j^{(i)} - \dot{\phi}_j^{(i)}/r) t r d\rho - \frac{1}{2} \oint_W \tau_{\alpha\rho} \dot{\phi}_j^{(i)} R_\alpha t d\rho + \oint \rho \phi_j^{(i)} r d\rho = 0 \quad m=1 \sim 8 \quad \dots 1)$$

$$\oint \tau_{\alpha\rho} \psi_j^{(i)} t ds - \oint_F \sigma_\alpha \psi_j^{(i)} t d\rho - \oint_W \sigma_\alpha \psi_j^{(i)} t d\rho + \oint \rho \psi_j^{(i)} r d\rho = 0 \quad m=1 \sim 4 \quad \dots 2)$$

ここで、 $\oint dF$ 、 $\oint t ds$ はそれぞれ全断面積、全周に関する積分、 $\oint_F d\rho$ 、 $\oint_W d\rho$ はそれぞれフランジ部、腹板部における積分である。応力—ひずみ、変位—ひずみの関係式を1)、2)に代入して変位に関する微分方程式に書き直しマトリックスの形で表示すると以下のようになる。

$$E[A]\{u\} - G[B]\{u\} + (E[C] - G[D])\{u\} + \{P\} = \{0\} \quad \dots 3)$$

$$-(E[C]^T - G[D]^T)\{u\} + G[D]\{u\} - E[F]\{u\} + \{Q\} = \{0\} \quad \dots 4)$$

ここで、 $A_{mj} = \oint (\phi_j^{(i)} \phi_j^{(i)}/r) dF$ 、 $B_{mj} = \oint_F (\dot{\phi}_j^{(i)} - \dot{\phi}_j^{(i)}/r) \cdot (\dot{\phi}_j^{(i)} - \dot{\phi}_j^{(i)}/r) t r d\rho + \oint_W \dot{\phi}_j^{(i)} \dot{\phi}_j^{(i)} t d\rho$ 、 $C_{mj} = \oint_F (\phi_j^{(i)} \cdot \psi_j^{(i)}/r) dF + \oint_W (\phi_j^{(i)} \cdot \psi_j^{(i)}/r) dF$ 、 $D_{mj} = \oint_F (\dot{\phi}_j^{(i)} - \dot{\phi}_j^{(i)}/r) \psi_j^{(i)} t d\rho + \oint_W \dot{\phi}_j^{(i)} \psi_j^{(i)} t d\rho$ 、 $F_{mj} = \oint (\psi_j^{(i)} \psi_j^{(i)}/r) t ds$ 、 $P_{mj} = \oint_F (\psi_j^{(i)} \psi_j^{(i)}/r) dF + \oint_W (\psi_j^{(i)} \psi_j^{(i)}/r) dF$ である。

3 有限要素法による解法

1) 変位関数に関する考察—衆知の通り、有限要素法において要素の細分化に伴い正解に収束するために変位関数に課せられる条件は、i)、すべての剛体モードを含むこと、ii)、一定ひずみを表わす項がひずみ表示に含

まれること、である。直交デカルト座標系では変位関数として定数項を含めて低次から変数を採用することにより上記 i), ii) の条件は自動的に満足される。ところが曲線座標系ではこの処理が簡単でないことが指摘されている。ここでは、箱面の都合上4種類の変位関数 について特に扇形板を対象として上記問題を検討した例について報告する。変位関数としては、1)一次関数(剛体回転のみを考慮)、2)三次関数(節点で変位の一階微分も未知数として考慮し、剛体回転のみを考慮)、3)三角関数(剛体移動のみを考慮)、4)すべての剛体モードを含む。の4種類である。図-3に解析したモデル、図-4、5に結果の一部を示す。詳細な考察は発表時に譲るとして、結果的には橋軸方向に三次関数を変位関数として採用することにした。これは、剛体モードを厳密に考慮しなくても実用上十分な精度が得られることが確認されたためであり、また3)の場合では、変位仮定における変数分離形の採用ができないためでもある。

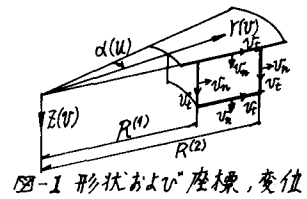


図-1 形状および座標, 変位

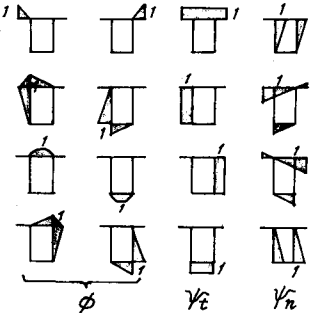


図-2 一般化座標

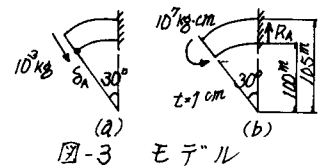


図-3 モデル

2) ガラーキン法による定式化-いま、図-6のようなα方向に角度θを有する有限要素(θ_k < α < θ_{k+1})を考える。局所座標ξをとり、形状関数を以下のように仮定する。

$$\delta \{u(\alpha)\} = \delta [L_1] \{u_k\} + \delta [L_2] \{u_{k+1}\} \quad \dots 5)$$

$$\delta \{v(\alpha)\} = \delta [M_1] \{v_k\} + \delta [M_2] \{v_{k+1}\} \quad \dots 6)$$

ここで、 $[L_1] = \begin{bmatrix} w^{(1)} & 0 \\ 0 & w^{(1)} \end{bmatrix}$, $[L_2] = \begin{bmatrix} w^{(2)} & 0 \\ 0 & w^{(2)} \end{bmatrix}$, $[M_1] = \begin{bmatrix} w^{(1)} & 0 \\ 0 & w^{(1)} \end{bmatrix}$, $[M_2] = \begin{bmatrix} w^{(2)} & 0 \\ 0 & w^{(2)} \end{bmatrix}$ である。また、 $w^{(1)} = 1 - 3(\beta/\theta)^2 + 2(\beta/\theta)^3$, $w^{(2)} = 3(\beta/\theta)^2 - 2(\beta/\theta)^3$, $w^{(3)} = \beta - 2\beta^3/\theta + \beta^3/\theta^2$, $w^{(4)} = -\beta^2/\theta + \beta^3/\theta^2$ であり、 $\{u_k\}$, $\{u_{k+1}\}$ は k, k+1 端での変位および変位の一階微分のベクトルである。 $\{v_k\}$, $\{v_{k+1}\}$ についても同様である。式3), 4) にガラーキン法を適用すると最終的に以下の式を得る。

$$\{\bar{P}_e\} = \int_0^\theta [E[A]\{u\} w^{(e)} + G[B]\{u\} w^{(e)} + E[C]\{v\} w^{(e)} + G[D]\{v\} w^{(e)}] d\alpha \quad e=1 \sim 4 \quad \dots 7)$$

$$\{Q_e\} = \int_0^\theta [G[C]^T\{u\} w^{(e)} + G[D]^T\{v\} w^{(e)} + E[C]^T\{u\} w^{(e)} + E[D]^T\{v\} w^{(e)}] d\alpha \quad e=1 \sim 4 \quad \dots 8)$$

式7), 8) に5), 6) を代入して積分を実施すれば、図-7に示す箱桁の剛性方程式が得られる。

4 数値計算結果

紙面の都合上当りスライドにて発表させていたが、ここに。

5 まとめ

以上の手法より、i) 腹板高さの変化する変断面桁、ii) 任意の曲率半径(斜め支持は取り扱えない)および方向をもつ曲線箱桁橋についても簡便かつ精度よく断面変形、せん断歪みの解析ができることがわかった。

参考文献: 坂井・長井・佐野, "ブロック有限要素法による薄肉箱桁の立体解析" 土木学会論文報告集, 第255号, 1976年11月

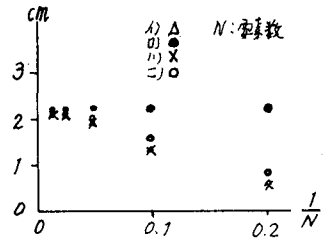


図-4 ケース(a) δAの収束状態

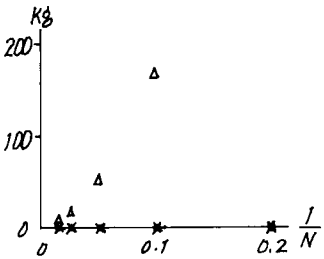


図-5 ケース(b) R_Aの収束状態

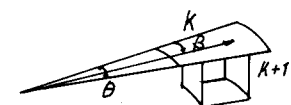


図-6 有限要素