

早稲田大学 学生員 井浦雅司

早稲田大学 正 員 平嶋政治

1. 緒言

一定の曲率及び撓率を有する薄肉曲線はりの研究⁽¹⁾に見られるように、空間曲線はりに関する研究は多い。本報告においては、ひずみ場の仮定を用いて、薄肉開断面をもつ空間曲線はりの基礎方程式を導き、さらに外力として慣性力を導入し、自由振動問題への適用を試みた。

2. 仮定

解析を行なう際に、以下の仮定を導入した。

- 微小変位である。
- 断面形状は不変である。
- 板厚中央面内のせん断ひずみは小さく無視できる。
- 板厚中央面に垂直で、母線軸方向の面でのせん断ひずみは小さく無視できる。
- 横断面は多角形状をなし、軸方向に一定である。

3. 変形前の幾何量

各座標系及びその基底ベクトル、各点の位置ベクトル等は、図に示す通りである。

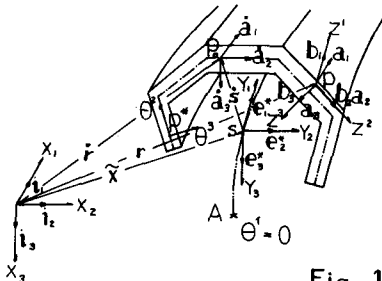


Fig. 1

Frenet-Serretの公式より、

$$\begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{bmatrix}_{,1} = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 x_1 は撓率を、 x_2 と x_3 は曲率を示し、各々は θ' の関数である。さらに、 $(\cdot)_{,1} = d(\cdot)/d\theta'$ である。任意点Pにおける基底ベクトルを単位直交ベクトル e_i^* で表わすことになる。

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{g} e_1^* - x_1 g_3 e_2^* + x_1 g_2 e_3^* \\ a_2 &= \dot{g}_{3,2} e_2^* + \dot{g}_{3,2} e_3^* \\ a_3 &= -\dot{g}_{3,2} e_2^* + \dot{g}_{3,2} e_3^* \end{aligned} \quad (2-abc)$$

ここで、 $\sqrt{g} = 1 + x_2 g_1 - x_3 g_2$, $g_2 = \dot{g}_2 - \dot{g}_{3,2} \theta'$, $g_3 = \dot{g}_3 + \dot{g}_{3,2} \theta'$, $(\cdot)_{,2} = d(\cdot)/d\theta^2$, $(\cdot)$ は中央面上での値を示す。

4. 変形後の幾何量

任意点Pの変形後の位置ベクトルは次式で表わされる。

$$\tilde{r} = r + v \quad (3)$$

ここで、変位ベクトル v を次式のように表わす。

$$v = w e_1^* + u e_2^* + v e_3^* \quad (4)$$

仮定a), b) より、 u, v は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} u &= u_0(\theta') - g_3 \vartheta(\theta') \\ v &= v_0(\theta') + g_2 \vartheta(\theta') \end{aligned} \quad (5-a, b)$$

仮定a) より、ひずみテンソルは次のように求まる。

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_{\alpha} \cdot v_{,\beta} + a_{\beta} \cdot v_{,\alpha}) \quad (6)$$

ここで、 $(\cdot)_{,\beta} = d(\cdot)/d\theta^\beta$ 。

仮定d) より、 $\gamma_{13} = 0$ 。これより次式が求まる。

$$\frac{w}{\sqrt{g}} = \frac{\{ (u_{0,1} + x_1 u_0) \dot{g}_{3,2} - (u_{0,1} - x_1 u_0) \dot{g}_{3,2} + \dot{h}_n \dot{g}_{3,1} \} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{1}{\sqrt{g_{2,2}}} \right) + k_0}{(x_2 \dot{g}_{3,2} + x_3 \dot{g}_{3,2})} \quad (7)$$

ここで、 $\sqrt{g_{2,2}} = 1 + x_2 (\dot{g}_2 + \dot{g}_{3,2} \theta') - x_3 (\dot{g}_2 - \dot{g}_{3,2} \theta')$, $\dot{h}_n = \dot{g}_2 \dot{g}_{3,2} + \dot{g}_3 \dot{g}_{3,2}$, k_0 は θ', θ^2 に依存する量である。仮定c) より、 $\dot{g}_{12} = 0$ 。

これより次式が求まる。

$$\frac{w}{\sqrt{g}} = - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(u_{0,1} - x_1 u_0) \dot{g}_{3,2} + (u_{0,1} + x_1 u_0) \dot{g}_{3,2} + \dot{h}_n \dot{g}_{3,1}}{\dot{g}} d\theta^2 + k_1 \quad (8)$$

ここで、 $\dot{h}_n = \dot{g}_2 \dot{g}_{3,2} - \dot{g}_3 \dot{g}_{3,2}$, k_1 は θ' に依存する量である。

式(7)・(8)より軸方向変位 w は次式で表わされる。

$$w = w_0 - g_2 \bar{r}_2 - g_3 \bar{r}_3 - w \bar{r}_0 \quad (9)$$

ここで、 $w_0 = \{ w_0 + (u_{0,1} - x_1 u_0) \dot{g}_2 + (u_{0,1} + x_1 u_0) \dot{g}_3 \} / \sqrt{g}$, $\sqrt{g} = 1 + x_2 \dot{g}_2 - x_3 \dot{g}_2$, $\bar{r}_2 = u_{0,1} - x_1 u_0 + x_2 w_0$, $\bar{r}_3 = u_{0,1} + x_1 u_0 - x_2 w_0$, $w = \frac{\dot{h}_n \theta^3}{\sqrt{g}} + \sqrt{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\dot{h}_n}{\dot{g}} d\theta^2$, $\bar{r}_0 = \vartheta_{,1} + x_2 \bar{r}_2 + x_3 \bar{r}_3$ 。さらに、 w_0 は点Pにおける軸方向変位を示す。点Pと座標系 Y_i の原点を仮想の薄板で連結すると、 w_0 は原点の軸方向変位 w_0 となり、 w は次のようになる。

$$w = w_0 - g_2 \bar{r}_2 - g_3 \bar{r}_3 - w \bar{r}_0 \quad (10)$$

ここで、 $\bar{r}_2 = u_{0,1} - x_1 u_0 + x_2 w_0$, $\bar{r}_3 = u_{0,1} + x_1 u_0 - x_2 w_0$,

$$\bar{r}_0 = \vartheta_{,1} + x_2 \bar{r}_2 + x_3 \bar{r}_3$$

座標系 θ' におけるひずみを計算すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \sqrt{g} (\bar{r}_0 - g_2 \Omega_u - g_3 \Omega_v - w \Omega_0 + H^* \bar{r}_0) \\ 2\gamma_{12} &= -\bar{r}_0 \theta' / \sqrt{g} \end{aligned} \quad (11-a, b)$$

ここで、 $\bar{r}_0 = w_{0,1} + x_2 u_0 - x_3 u_0$, $\Omega_u = \sqrt{g_{2,2}} - x_1 \sqrt{g} - x_2 \vartheta$,

$$\Omega_v = \sqrt{3}_1 + x_1 \sqrt{2} - x_2 \sqrt{3}, \quad \Omega_\theta = \sqrt{2}_1,$$

$$H^* = \frac{x_1(\sqrt{2}_1 + \sqrt{2}_2 + x_2 \sqrt{3}_1 \omega + x_3 \sqrt{3}_2 \omega)}{\sqrt{3}} - \omega_{11},$$

$$\theta = \theta^2 \left(2 + \frac{x_2 \sqrt{2}_1 + x_3 \sqrt{2}_2}{\sqrt{3}} \theta^3 \right),$$

上記のひずみを局所直交座標系⁽³⁾におけるひずみに変換すると次式を得る。

$$\varepsilon_{11} = (\Gamma_w - y_2 \Omega_u - y_3 \Omega_v - \omega \Omega_\theta + H^{**}/\sqrt{3})/\sqrt{3} \quad (12-a,b)$$

$$2\varepsilon_{12} = -\sqrt{3} \theta / \sqrt{3} \sqrt{3}$$

$$\text{ここで, } H^{**} = H^* + \frac{\partial_{12} \theta}{\sqrt{3} \sqrt{3}}, \quad a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta$$

5. つり合い式と境界条件

仮想仕事の原理は、 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$ 以外は全て0であることとを考慮すると、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} & \iiint \{ \sigma_{11}^* \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{12}^* \delta (2\varepsilon_{12}) \} \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3 \\ & - \iiint (P_1 \delta \omega + P_2 \delta u + P_3 \delta v) \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3 \\ & - \left[\int (\bar{P}_1 \delta \omega + \bar{P}_2 \delta u + \bar{P}_3 \delta v) d\theta^2 d\theta^3 \right]_{\theta^2=\theta^2_0}^{\theta^2=\theta^2_1} = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

ここで、 P_1, P_2, P_3 は、はりの単位体積あたりに作用する力で、 $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ は、はりの両端断面の単位面積あたりに作用する力である。式(5)(10)(12)を式(13)に代入し、部分積分を行なうと、平衡方程式及び境界条件を得る。

(平衡方程式)

$$\begin{aligned} N_{,1} + x_2 M_{2,1} + x_3 M_{3,1} + x_3 M_{3,1} - x_1 x_2 M_{3,1} + N^* + x_2 M_{2,1}^* + x_3 M_{3,1}^* &= 0 \\ -x_3 N + M_{3,1} - x_1^* M_{3,1} + x_1 M_{2,1} + (x_1 M_{2,1})_{,1} - (x_2 M_{1,1})_{,1} + x_1 x_3 M_{1,1} \\ &+ M_{3,1}^* + x_1 M_{2,1}^* - (x_2 H_{\omega}^*)_{,1} + x_1 x_3 H_{\omega}^* - Q_2^* = 0 \\ x_2 N - M_{2,1} + x_1^* M_{2,1} + x_1 M_{3,1} + (x_1 M_{3,1})_{,1} - (x_3 M_{1,1})_{,1} - x_1 x_2 M_{1,1} \\ &+ x_1 M_{3,1}^* - M_{2,1}^* - (x_3 H_{\omega}^*)_{,1} - x_1 x_2 H_{\omega}^* - Q_3^* = 0 \\ -x_2 M_{3,1} + x_3 M_{2,1} - M_{1,1} - H_{\omega}^*_{,1} - M_{\theta}^* = 0 \quad (14-a,b,c,d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } N &= \iint \sigma_{11}^* d\theta^2 d\theta^3, M_2 = \iint \sigma_{12}^* y_2 d\theta^2 d\theta^3, M_3 = -\iint \sigma_{12}^* y_3 d\theta^2 d\theta^3, \\ H_{\omega}^* &= \iint \sigma_{12}^* \omega d\theta^2 d\theta^3, Z = \iint \sigma_{11}^* H^{**} d\theta^2 d\theta^3, T = -\iint \sigma_{12}^* \theta / \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, \\ M_{1,1} &= T + Z + H_{\omega}^*_{,1}, N^* = \iint P_1 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, M_{3,1}^* = -\iint P_2 y_2 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, \\ M_{2,1}^* &= \iint P_3 y_3 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, H_{\omega}^* = \iint P_1 \omega \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, Q_2^* = \iint P_2 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, \\ Q_3^* &= \iint P_3 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, m_{\theta}^* = \iint (-P_2 y_3 + P_3 y_2) \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3. \end{aligned}$$

(境界条件)

$$\begin{aligned} \omega_1 = C_1 \text{ or } N - \bar{N}^* &= 0 \\ u_1 = C_2 \text{ or } M_{3,1} + x_1 M_{2,1} - x_2 M_{1,1} + M_{3,1}^* - x_2 H_{\omega}^* + \bar{Q}_2^* &= 0 \\ v_1 = C_3 \text{ or } M_{2,1} - x_1 M_{3,1} + x_3 M_{1,1} + M_{2,1}^* + x_3 H_{\omega}^* - \bar{Q}_3^* &= 0 \\ \Gamma_2 = C_4 \text{ or } M_3 - \bar{M}_3^* &= 0 \\ \Gamma_3 = C_5 \text{ or } M_2 - \bar{M}_2^* &= 0 \\ \vartheta = C_6 \text{ or } M_{1,1} + H_{\omega}^* - \bar{m}_{\theta}^* &= 0 \quad (15-a,b,c,d, \\ & \quad e,f,g.) \\ \Gamma_{\theta} = C_7 \text{ or } H_{\omega} - \bar{H}_{\omega}^* &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \bar{N}^* &= \iint \bar{P}_1 d\theta^2 d\theta^3, \bar{M}_3^* = -\iint \bar{P}_2 y_2 d\theta^2 d\theta^3, \bar{M}_2^* = \iint \bar{P}_3 y_3 d\theta^2 d\theta^3, \\ \bar{H}_{\omega}^* &= \iint \bar{P}_1 \omega d\theta^2 d\theta^3, \bar{Q}_2^* = \iint \bar{P}_2 d\theta^2 d\theta^3, \bar{Q}_3^* = \iint \bar{P}_3 d\theta^2 d\theta^3, \end{aligned}$$

$$\bar{m}_{\theta}^* = \iint (-\bar{P}_2 y_3 + \bar{P}_3 y_2) d\theta^2 d\theta^3, \quad C_1 \sim C_7 \text{ は定数である。}$$

6. 慣性力の導入

はりの単位体積あたりの慣性力は、はりの密度を ρ とし、式(5)(10)を考慮すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} P_1^{**} &= -\rho \{ \ddot{\omega}_1 - y_2 \ddot{\Gamma}_2 - y_3 \ddot{\Gamma}_3 - \omega \ddot{\Gamma}_{\theta} \} \\ P_2^{**} &= -\rho \{ \ddot{u}_1 - y_3 \ddot{\vartheta} \} \\ P_3^{**} &= -\rho \{ \ddot{v}_1 + y_2 \ddot{\vartheta} \} \end{aligned} \quad (16-a,b,c)$$

ここで、 $(\ddot{\cdot}) = \partial^2 / \partial t^2$ 。式(16)を断面積分して、はりの単位長さあたりの慣性力が次のように求まる。

$$\begin{aligned} N^{**} &= -\rho K_0 \ddot{\omega}_1 + \rho K_u \ddot{\Gamma}_2 + \rho K_v \ddot{\Gamma}_3 + \rho K_w \ddot{\Gamma}_{\theta} \\ M_2^{**} &= -\rho K_v \ddot{\omega}_1 + \rho K_{uv} \ddot{\Gamma}_2 + \rho K_{vv} \ddot{\Gamma}_3 + \rho K_{wv} \ddot{\Gamma}_{\theta} \\ M_3^{**} &= \rho K_u \ddot{\omega}_1 - \rho K_{uv} \ddot{\Gamma}_2 - \rho K_{vv} \ddot{\Gamma}_3 - \rho K_{wv} \ddot{\Gamma}_{\theta} \\ H_{\omega}^{**} &= -\rho K_w \ddot{\omega}_1 + \rho K_{wu} \ddot{\Gamma}_2 + \rho K_{wv} \ddot{\Gamma}_3 + \rho K_{ww} \ddot{\Gamma}_{\theta} \\ Q_2^{**} &= -\rho K_0 \ddot{u}_1 + \rho K_v \ddot{\vartheta} \\ Q_3^{**} &= -\rho K_0 \ddot{v}_1 - \rho K_u \ddot{\vartheta} \quad (17-a,b,c,d, \\ & \quad e,f,g.) \\ m_{\theta}^{**} &= \rho K_v \ddot{u}_1 - \rho K_u \ddot{v}_1 - \rho (K_{uu} + K_{vv}) \ddot{\vartheta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } K_0 &= \iint \rho \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, K_u = \iint y_2 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, K_v = \iint y_3 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, \\ K_w &= \iint \omega \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, K_{uv} = \iint y_2 y_3 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, K_{uu} = \iint y_2^2 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, \\ K_{vv} &= \iint y_3^2 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, K_{wu} = \iint \omega y_2 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, K_{wv} = \iint \omega y_3 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3, \\ K_{ww} &= \iint \omega^2 \sqrt{3} d\theta^2 d\theta^3. \end{aligned}$$

式(17)を式(14)における荷重項に代入すれば、薄肉空間曲線はりの振動問題の支配方程式が得られる。

7. 応力のつり合い方程式

微小要素における軸方向の応力のつり合い式は、 σ_{11}^* を用いて次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial \theta^1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial \theta^1} (\partial_{12} \sigma_{11}^*) - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial \theta^1} (\partial_{13} \sigma_{11}^*) \\ + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial \theta^1} (\vartheta \sigma_{11}^*) + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial \theta^1} (\vartheta \sigma_{11}^*) + F_1 = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

ここで、 F_1 は body force である。

8. 結語

本報告の特別な場合として得られる平面内曲線はりの静的解析の結果は、文献(2)と一致することを確認した。

9. 文献

- (1) 築地：土木学会論文集 No. 230
- (2) 西野・深沢：土木学会論文集 No. 247
- (3) Washizu：Journ. of Math. and Phys., Vol. 43