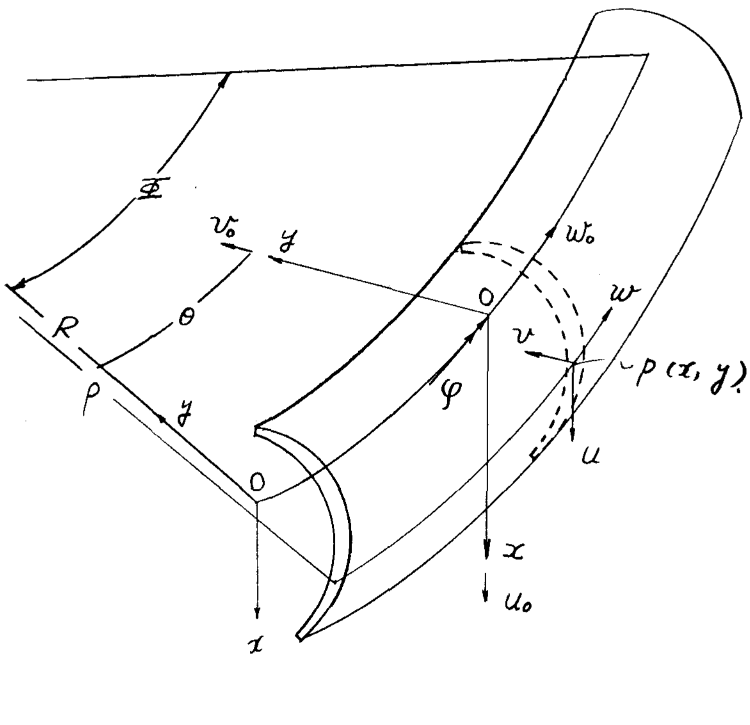
I-22　薄肉断面曲線けたの質量マトリックス

秋田大学　学生員　○赤石　均
秋田大学　正　員　　薄木　征三
秋田大学　正　員　　稼農　知徳

1. 諸言　　薄肉断面曲線けたに鉛直方向の静的あるいは動的荷重を作用させると、部材軸線の曲率面外変位、すなわち鉛直方向変位 u と断面のねじれ角 φ が連成して生ずることは良く知られている。曲線けたの振動応答解析の基礎としての固有値問題は、したがって、これを解析的に解くことは直線げたに比べると容易ではない。しかも、横断面形が対称軸を持たない曲線げたでは、曲率半径方向変位 v と軸方向変位 w、すなわち、曲率面内の変位も連成して生ずるために、固有値問題は一層複雑なものとなる。この意味において、曲線けたの固有値解析は剛性法に基づくのが簡明であり、汎用性の点でも便利であろう。以下には質量マトリックスの誘導を試みる。

2. 仮想仕事の原理

図のように座標軸を選ぶ。原点 O は任意点とし、O を貫く母線を部材軸線とする。断面内の任意点 P(x,y) の x, y, θ 方向の変位は



$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 - y\varphi \\ v &= v_0 + x\varphi \\ w &= w_0 - y\phi_x - x\phi_y - \omega\psi_z \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここで $\omega(s)$ はそり関数であり ϕ_x, ϕ_y, ψ_z は

$$\left.\begin{aligned} \phi_x &= \frac{1}{R}\frac{dv_0}{d\theta} - \frac{w_0}{R} \\ \phi_y &= \frac{1}{R}\frac{du_0}{d\theta} \\ \psi_z &= \frac{1}{R}\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{\phi_y}{R} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

自由振動している薄肉曲線けたの仮想仕事の原理は

$$\int_0^{\Phi}\int_F (\sigma_\theta \varepsilon_\theta^* + \tau_s \gamma_s^*)\, dF \rho\, d\theta$$
$$+ \int_0^{\Phi}\int_F \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot u^* + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\cdot v^* + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cdot w^*\right) dF \rho\, d\theta$$
$$- \left[\int_F (\bar{\tau}_{x\theta} u^* + \bar{\tau}_{y\theta} v^* + \bar{\sigma}_\theta w^*)\, dF\right]_0^{\Phi} = 0 \quad (3)$$

ここで γ/g は曲線けたの材料の質量, $\bar{\tau}_{x\theta}$, $\bar{\tau}_{y\theta}$, $\bar{\sigma}_\theta$ は、けた両端で作用している表面力である。$\partial^2 u/\partial t^2$ は x方向の加速度を表わす。$*$ は仮想変位を表わす。

$\theta=0$ を節点 i, $\theta=\Phi$ を節点 j とすると、例えば節点 i では 式(1) より

$$\left.\begin{aligned} u^* &= u_i^* - y\varphi_i^* , \quad v^* = v_i^* + x\varphi_i^* \\ w^* &= w_i^* - y\phi_{xi}^* - x\phi_{yi}^* - \omega\psi_{zi}^* \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

次に軸線の変位を

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 \\ v_0 &= b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + b_3\theta^3 \\ w_0 &= c_0 + c_1\theta \\ \varphi &= d_0 + d_1\theta + d_2\theta^2 + d_3\theta^3 \end{aligned}\right\} \text{----} \ (5)$$

と近似し、$a_0, a_1, \text{----}, d_3$ を節点 i, j の節点変位で表わす。その結果を(5)に代入し.

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= N_1u_i + N_2\phi_{yi} + N_3u_j + N_4\phi_{yj} \\ v_0 &= N_1v_i + N_2\phi_{xi} - N_2 w_i/R + N_3v_j + N_4\phi_{xj} - N_4 w_j/R \\ w_0 &= N_5 w_i + N_6 w_j \\ \varphi &= N_1\varphi_i + N_2\psi_{zi} + N_2\phi_{yi}/R + N_3\varphi_j + N_4\psi_{zj} + N_4\phi_{yj}/R \end{aligned}\right\} (6)$$

ここで

$$N_1 = 1 - 3\theta^2/\Phi^2 + 2\theta^3/\Phi^3 , \quad N_2 = R\theta(1 - 2\theta/\Phi + \theta^2/\Phi^2)$$

$$N_3 = \theta^2(3 - 2\theta/\Phi)/\Phi^2 , \quad N_4 = R\theta^2(-1 + \theta/\Phi)/\Phi$$

$$N_5 = 1 - \theta/\Phi , \quad N_6 = \theta/\Phi \quad \text{----} \ (7)$$

すなわち N_i は θ の関数である。式(5)と(6)を式(2)に代入すると接線回転角 ϕ_x, ϕ_y とねじり率 ψ_z も節点変位で表わされる。その結果と式(5),(6)を式(1)に代入すると、任意 $P(x, y)$ の変位は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c:c:c:c:c:c:c:c} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2(1-\frac{y}{R}) & -yN_1 & -yN_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4(1-\frac{y}{R}) & -yN_3 & -yN_4 \\ 0 & N_1 & -\frac{N_2}{R} & N_2 & \frac{N_2}{R}x & xN_1 & xN_2 & 0 & N_3 & -\frac{N_4}{R} & N_4 & \frac{N_4}{R}x & xN_3 & xN_4 \\ N_1'(x-\frac{\omega}{R}) & -yN_1' & N_5+\frac{y}{R}(N_2'-N_5) & -yN_2' & -xN_2' & -\omega N_1' & -\omega N_2' & -N_3'(x-\frac{\omega}{R}) & -yN_3' & N_6+\frac{y}{R}(N_4'-N_6) & -yN_4' & -xN_4' & -\omega N_3' & -\omega N_4' \end{array}\right]$$

$$x\{\delta\} = [L]\{\delta\} \text{-------} \ (7)$$

ここで $\{\delta\}^T = [\, u_i \ v_i \ w_i \ \phi_{xi} \ \phi_{yi} \ \varphi_i \ \psi_{zi}$
$u_j \ v_j \ w_j \ \phi_{xj} \ \phi_{yj} \ \varphi_j \ \psi_{zj} \,]$ ---- (8)

は節点変位ベクトルである。

式(4),(5),(7)を式(3)に代入する。そして積分を実行すると次の関係を得る。

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{P\} \text{------} \ (9)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} [M] &= \int_0^{\Phi}\int_F \frac{\gamma}{g}[L]^T[L]\, dF \rho\, d\theta \\ [K] &= \int_0^{\Phi}\int_F [B]^T[D][B]\, dF \rho\, d\theta \end{aligned}\right\} (10)$$

また、$\{P\}^T = [\, Q_{xi} \ Q_{yi} \ N_i \ M_{xi} \ M_{yi} \ T_{zi} \ M_{\omega i} \ Q_{xj} \ Q_{yj} \ N_j \ M_{xj} \ M_{yj} \ T_{zj} \ M_{\omega j} \,]$ は節点力ベクトルである. 式(10)の $[K]$ は剛性マトリックスであり、$[B]$, $[D]$ の内容は文献1)を参照されたい。質量マトリックスは $[M]$ である。式(9)を次のように書き換える。

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\beta} \\ M_{\beta\alpha} & M_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_\alpha \\ \ddot{\delta}_\beta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_\alpha \\ \delta_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} \{P_\alpha\}^T &= [\, Q_{xi} \ M_{yi} \ T_{zi} \ M_{\omega i} \ Q_{xj} \ M_{yj} \ T_{zj} \ M_{\omega j} \,] \\ \{P_\beta\}^T &= [\, Q_{yi} \ N_i \ M_{xi} \ Q_{yj} \ N_j \ M_{xj} \,] \\ \{\delta_\alpha\}^T &= [\, u_i \ \phi_{yi} \ \varphi_i \ \psi_{zi} \ u_j \ \phi_{yj} \ \varphi_j \ \psi_{zj} \,] \\ \{\delta_\beta\}^T &= [\, v_i \ w_i \ \phi_{xi} \ v_j \ w_j \ \phi_{xj} \,] \end{aligned}\right\} (12)$$

である。すると、例えば $[M_{\alpha\alpha}]$ と $[M_{\beta\beta}]$ の対角要素を $\alpha(i,i)$, $\beta(j,j)$ とすると次のようである。

$$\alpha(1,1) = \frac{\gamma}{g}\left\{\frac{13}{35}LA + \frac{6}{5L}\left(I_y - \frac{2}{R}B_y + \frac{I_\omega}{R^2}\right)\right\}$$

$$\alpha(2,2) = \frac{\gamma}{g}\left\{\frac{L^3}{105}\left(A - \frac{2}{R}X_x + \frac{I_x}{R^2} + \frac{I_y}{R^2}\right) + \frac{2}{15}LI_y\right\}$$

$$\alpha(3,3) = \frac{\gamma}{g}\left\{\frac{13}{35}L(I_x + I_y) + \frac{6I_\omega}{5L}\right\}$$

$$\alpha(4,4) = \frac{\gamma}{g}\left\{\frac{L^3}{105}(I_x + I_y) + \frac{2L}{15}I_\omega\right\}$$

$$\alpha(5,5) = \alpha(1,1) , \quad \alpha(6,6) = \alpha(2,2)$$

$$\alpha(7,7) = \alpha(3,3) , \quad \alpha(8,8) = \alpha(4,4)$$

$$\beta(1,1) = \frac{\gamma}{g}\left\{\frac{13}{35}L \cdot A + \frac{6I_x}{5L}\right\}$$

$$\beta(2,2) = \frac{\gamma}{g}\left\{\frac{L^3 \cdot A}{105R^2} + \frac{LA}{3} - \frac{LX_x}{2R} + \frac{3L}{10R^2}I_x\right\}$$

$$\beta(3,3) = \frac{\gamma}{g}\left\{\frac{L^3 \cdot A}{105} + \frac{2L}{15}I_x\right\} , \quad \beta(4,4) = \beta(1,1)$$

$$\beta(5,5) = \beta(2,2) , \quad \beta(6,6) = \beta(3,3)$$

ここで $L = R\Phi$, $A = \int_F \frac{\rho}{R} dF$, $X_x = \int_F \frac{\rho}{R} y\, dF$, $B_y = \int_F \frac{\rho}{R} x\omega\, dF$
$I_x = \int_F \frac{\rho}{R} y^2 dF$, $I_y = \int_F \frac{\rho}{R} x^2 dF$, $I_\omega = \int_F \frac{\rho}{R} \omega^2 dF$

文献1) 薄木・稼農：薄肉曲線材の変形法による解析、学会論文集 235号 .1975年