

山梨大学工学部 正員 太田貞次  
 山梨大学工学部 正員 深沢泰晴  
 山梨大学工学部 八田政仁

1. はじめに

せん断変形と回転慣性をともに考慮した、いわゆるティモシェンコばり理論を薄肉曲線ばりの振動問題に適用した。著者等は、薄肉直線ばりについて、2方向の曲げに伴うせん断変形相互間、あるいは曲げと反り拘束に伴うせん断変形相互間の連成作用をも考慮した解析手法を提案したが<sup>1)</sup>、同様な手法により薄肉曲線ばりの振動解析を行なうものである。すなわち、薄肉曲線ばりに対するせん断変形を考慮した変位場を設定し、仮想仕事の原理を適用してつりあい方程式を求める。一方、応力-ひずみ関係から得られる直応力およびこれとともに応力のつりあい式を満たすせん断応力からなる応力場に補仮想仕事の原理を適用し、前に求めたつりあい式を付帯条件として課すことにより、断面力-変位関係を導く。以上より、問題の支配方程式としての変位表示のつりあい方程式ならびに動的つりあい方程式が得られる(図-1)。

このようにして求めた動的つりあい方程式を用いて、数種の代表的な1軸対称断面をもつ薄肉曲線ばりについて波動解析を行ない、曲げねじれ振動波の伝播特性を究明することを試みた。

2. 振動方程式

薄肉曲線ばりの一般図および横断面図を図-2に示す。図-2に示す記号を用いて、曲げおよび曲げねじれに伴うせん断変形を考慮した場合の任意点P(x, y, θ)のx, y, θ方向の変位成分u, v, wが、せん断変形を無視した理論を修正して、つぎのように得られる<sup>2)</sup>;

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - (y - y_0) \psi \\ v &= v_0 + (x - x_0) \psi \\ w &= w_0 - (x - x_0) \left( \frac{R_s}{R_c} \psi_2 + \frac{y_0 - y_c}{R_c} \psi - \frac{w_0}{R_c} \right) \\ &\quad - (y - y_c) \psi_2 - \omega \left( \rho - \frac{\psi}{R_s} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)_{a-c}$$

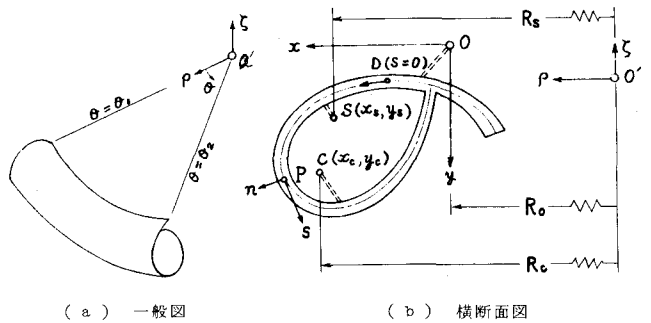


図-2 薄肉曲線ばりの一般図および横断面図

ここに、 $\psi_2, \psi_0$  はそれぞれせん断変形を考慮した場合の $\psi$ およびx軸まわりの平均回転角であり、 $\psi_0$  はねじれ率である。式(1)で表わされる変位場から、これに対応するひずみ場を求め、仮想仕事の原理を適用して、断面力表示の静的つりあい方程式を導く。

直応力  $\sigma_0$  は、応力-ひずみ関係に一次元 Hooke の法則を仮定し、直交条件  $\int_F x dF = \int_F y dF = \int_F \omega dF = \int_F x \omega dF = \int_F y \omega dF = 0$  を考慮すると、次式のように書くことができる;

図-1 定式化の手順

$$\sigma_0 = \frac{R_0}{\rho} \frac{N}{F} + \frac{R_0}{\rho} \frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} X + \frac{R_0}{\rho} \frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} Y + \frac{R_0}{\rho} \frac{M_{\omega}}{I_{\omega\omega}} \omega \quad \text{--- (2)}$$

ここに、 $N = \int_F \sigma_0 dF$ ,  $M_x = \int_F \sigma_0 x dF$ ,  $M_y = \int_F \sigma_0 y dF$ ,  $M_{\omega} = \int_F \sigma_0 \omega dF$  であり、 $I_{xx} = \int_F x^2 dF$ ,  $I_{yy} = \int_F y^2 dF$ ,  $I_{xy} = \int_F xy dF$ ,  $I_{\omega\omega} = \int_F \omega^2 dF$  である。一方、せん断応力  $\tau_{z0}$  については、式(2)の  $\sigma_0$  とともにはりの微小要素  $t ds d\theta$  に作用する  $d\theta$  方向の力のつりあい条件  $1/\rho^2 \cdot \partial/\partial s (\rho^2 \tau_{z0}^* t) + t/\rho^2 \cdot \partial \sigma_0^*/\partial \theta = 0$  を積分して求める。すなわち、近似的に次式で表わされる<sup>2)</sup>;

$$\tau_{z0} = \frac{R_0}{\rho} \frac{T_x}{I_{xx}} X + \frac{R_0 \rho}{\rho^2} \frac{\hat{\delta}_x^*}{t} + \frac{\rho}{\rho^2} \tau_{z0}^* \quad \text{--- (3) ただし } X = \begin{cases} \frac{R_0}{\rho^2} n \left(2 + \frac{n l}{\rho^2}\right) & \text{: 閉区間} \\ \frac{R_0}{\rho^2} n \left(2 + \frac{n l}{\rho^2}\right) + \frac{R_0^2 \rho^2}{R_5 \rho^2} \frac{\hat{\delta}_x^*}{t} & \text{: 開区間} \end{cases}$$

ここに、 $T_x = \int_F \tau_{z0} x dF$  であり  $I_{xx} = \int_F x^2 dF$ 。さらに

$$\tau_{z0}^* = - \frac{R_0}{\rho^2 t} \left( \frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} S_x^* + \frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} S_y^* + \frac{R_0}{R_0} \frac{M_{\omega}'}{I_{\omega\omega}} S_{\omega}^* \right) \quad \text{--- (4)}$$

ここに、 $S_x^* = \int^A x t dA$ ,  $S_y^* = \int^A y t dA$ ,  $S_{\omega}^* = \int^A \omega t dA$  である。 $\hat{\delta}_x^*$  については、開区間では0、閉区間においては各ループごとの一周に対する  $\omega^*$  の連続条件によって定める。

式(1)、(2)および(3)をもとに、静的つりあい方程式を付帯条件として課した補仮想仕事の原理を用いて、式(1)の変位場および式(2)、(3)の応力場を満たす断面力-変位関係が次のように得られる;

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{EF}{R_0} \left\{ \omega_0' + u_0 + \chi_0 \left( \frac{R_0}{R_c} \psi_2' + \frac{y_0 - y_c}{R_c} \psi_1' - \frac{\omega_0'}{R_c} \right) + y_0 \psi + \psi_0 y_0 \right\} \\ M_x I_{yy} - M_y I_{xy} &= - \frac{E}{R_0} (I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2) \left( \frac{R_0}{R_c} \psi_2' + \frac{y_0 - y_c}{R_c} \psi_1' - \frac{\omega_0'}{R_c} \right) \\ M_y I_{xx} - M_x I_{xy} &= - \frac{E}{R_0} (I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2) (\psi + \psi_0') & M_{\omega} &= - \frac{E I_{\omega\omega}}{R_5} \left( \psi' - \frac{\psi_0'}{R_5} \right) \\ A_{11} Q_x + A_{12} Q_y + A_{13} T_x + A_{14} T_{\omega} &= G (u_0' - R_5 \psi_0) \\ A_{21} Q_x + A_{22} Q_y + A_{23} T_x + A_{24} T_{\omega} &= G (v_0' - R_5 \psi_0) \\ A_{31} Q_x + A_{32} Q_y + A_{33} T_x + A_{34} T_{\omega} &= G (\psi' - \psi_0) \\ A_{41} Q_x + A_{42} Q_y + A_{43} T_x + A_{44} T_{\omega} &= G (\psi' - R_5 \psi) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (5) a-r}$$

式(5)における  $A_{11}, A_{12}$  等は従来のせん断補正係数に対応するものであり、最も一般的な断面形状をもつ曲線ばりの場合、 $Q_x, Q_y, T_x, T_{\omega}$  のすべてが達成している。式(5)を静的つりあい方程式に代入すると、変位表示の静的つりあい方程式が得られる。変位表示の静的つりあい方程式の荷重項をはりの振動時における慣性力でおきかえることにより、振動問題の支配方程式が得られる。

### 3. 数値解析結果の一例と結論

以上求めた動的支配方程式に基づき、数種の1軸対称断面の薄肉曲線ばりについて自由振動波の波動解析を行ない、その伝播特性を調べた。数値解析結果の一例として、チャンネル断面をもつ曲線ばりの位相速度と波長の関係を図-3に示す。図中実線は本解析による値であり、破線はせん断変形および回転慣性をともに無視した場合の値である。前者の場合には、高周波振動領域では4つの波列が振動数にほとんど無関係に一定の波速で伝播するのに対し、後者は無限大の波速を手えてしまうことがわかった。

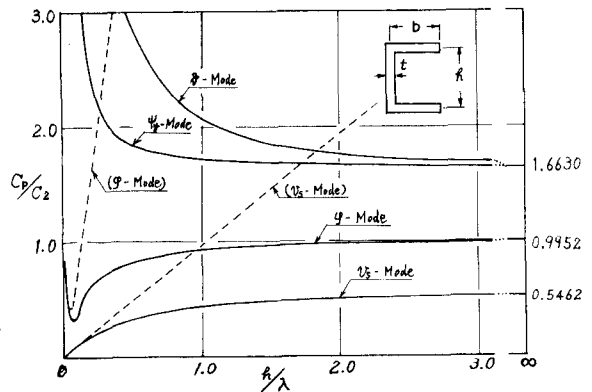


図-3 チャンネル断面をもつ曲線ばりにおける位相速度と波長の関係 ( $b/R=1/4$ ,  $t/R=1/25$ ,  $R_0/R=15$ )

参考文献 1) 深沢・太田: 第31回土木学会講演概要集, 昭51-10, 2) 西野・深沢: 土木学会論文報告集 No.247, 1976年