

秋田高専工工学科

秋田大学工工学科

秋田大学工工学科

正員 堀江 保

正員 稼農 知徳

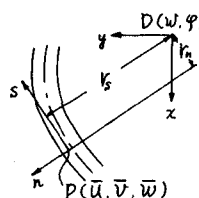
正員 藤木 佐三

1. はじめに

いわゆる梁の古典曲げ理論において、せん断ひずみゼロの仮定より出発し、せん断応力は軸応力とのフリあいより求められている。この仮定は、同様に薄肉部材に対するネリ拘束ねじりの古典理論にも応用されている。これらの理論では、せん断応力によるせん断ひずみを無視しており、変位場を求める段階において応力のフリあいを満たしてはいない、という矛盾した結果を生み出す。本文は、特にねじりを受ける部材に注目し、断面形状によっては、またネリ拘束の大きい部分ではこのせん断変形の影響を無視できない、この観点に立ち、変位場をフリあいを満たすべく修正したものである。その際、基本的仮定として「I」断面形状不変、「II」肉厚中心面に垂直で部材軸に平行な面のせん断ひずみは無視する、を用いた。

2. ひずみ成分表示

本法によるひずみ成分誘導の概略を示すところとなる(詳細は文献¹⁾参照)。



座標系は横断面上の任意原点Dに關するx, y, z座標系、および薄肉中心線に關するs, n, z座標系を用いる。また、左図にあり、 r_s, r_n は原点よりs方向、n方向までの距離である。

x, y, z座標系に關する変位-ひずみ関係として次式を用いる。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2)$$

仮定「I」より $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ だから原点まわりのねじり角を φ として次式が求まる。

$$u = -y \cdot \varphi \quad v = x \cdot \varphi \quad (3)$$

s, n, z座標系のせん断ひずみは、x, y, z座標系との関係より

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial w}{\partial s} + r_s \cdot \varphi' \quad \gamma_{nz} = \frac{\partial w}{\partial n} + r_n \cdot \varphi' \quad (4) a, b$$

となる。また、微小要素 $d s \cdot d z$ のz軸方向の応力のフリあいより次式を得る。

$$r_{sz}^* = \frac{\partial}{\partial z} - \int_s \frac{\partial \gamma_{sz}^*}{\partial z} \cdot d s \quad (5)$$

(5)式において*は薄肉中心線上のものを表わし、応力

は、平均値として中心線に關するものを代表させた。

また、zの軸方向変化はなにもつとした。

(6)式ではじめ軸応力とフリあうせん断変形を無視したものを(4)a式とより

$$\bar{w}_1^* = \int_0^s \frac{\partial}{\partial z} \cdot d s - r_n^* \cdot \varphi_1' \quad (6)$$

となる。ここで、添字1は軸応力とのフリあいを無視したときの変位を表わす。一方、(4)b式に仮定「II」と適用すると次式になる。

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_1^* - r_n \cdot \varphi_1' \cdot n$$

上式に(6)式を代入し、また変位の連続条件 $\oint \frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial s} \cdot d s = 0$ より φ_1 を求めるべき式を得る。

$$\bar{w}_1 = \bar{C}_1 - (\bar{\omega} + n \cdot r_n) \varphi_1' \quad (7)$$

ここで

$$\bar{\omega} = \int_0^s \left\{ r_s^* - \frac{1}{z} \oint \frac{\partial r_s^* \cdot d s}{\partial z} \right\} \cdot d s \quad (8)$$

である。(7)式中積分定数 $\bar{C}_1$ は仮想薄板の方法²⁾を用いて原点D上の変位を表わせるから次式が求まる。

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_1 - \omega \cdot \varphi_1' \quad (9)$$

ここで、 ω はネリ体積ゼロと満たすよう選ぶべき式で与えられる。

$$\omega = \bar{\omega} + r_n \cdot n - \frac{1}{F} \int_n (\bar{\omega} + r_n \cdot n) \cdot d F \quad (10)$$

(7)式より軸応力を求め(5)式に代入して同様の手順を繰り返すと、修正後の変位を添字2を付して表わして

$$\bar{w}_2 = \bar{w}_2 - \omega \cdot \varphi_2' + \frac{E}{G} B \omega \cdot z \quad (11)$$

こゝで、重は新たに自由度として設けたパラメータで次式で表わされる。

$$\bar{w} = \varphi_1''' \quad (12)$$

また

$$B_w = \int_0^L \frac{1}{t} S_w dS \quad S_w = S_{w0} - \frac{\phi \frac{1}{t} S_w dS}{\phi \frac{1}{t} dS} \quad S_{w0} = \int_0^L \omega^2 t dS \quad (13)$$

である。(3)式および(11)式よりひずみ成分は

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= -\omega \cdot \varphi'' + \frac{E}{G} B_w \bar{w}' \\ \delta_{sz} &= \Theta \cdot \varphi' + \frac{E}{G t} S_w \bar{w} \end{aligned} \quad (14) a, b$$

本法においては、1回の修正で十分であることが確かめられたので上式において添字は省いた。また、④は次式で与えられる。

$$\Theta = \begin{cases} 2n + \frac{1}{t} \frac{\phi r_s^2 dS}{\phi \frac{1}{t} dS} & (\text{閉断面}) \\ 2n & (\text{開断面}) \end{cases} \quad (15)$$

3. 微分方程式と境界条件

前項のひずみ成分より内部ひずみエネルギーを求め仮想仕事の原理を適用すると、つぎの微分方程式、および境界条件が得られる。

$$\begin{aligned} EJ_w \varphi'''' - GJ_z \varphi'' - E_g K_{ww} \bar{w}'' - E D_{ww} \bar{w}' &= m_z + m_w' \\ E_g K_{ww} \varphi''' + E D_{ww} \varphi' - E_{gg} R_{ww} \bar{w} + E_g D_{ww} \bar{w} &= 0 \end{aligned} \quad (16) a, b$$

$z = z_1$ および $z = z_2$ において

$$\begin{aligned} \delta \varphi &= 0 \quad \text{または} \\ -EJ_w \varphi'' + GJ_z \varphi' + E_g K_{ww} \bar{w} + E D_{ww} \bar{w} &= \bar{T}_z - m_w \\ \delta \varphi' &= 0 \quad \text{または} \\ -EJ_w \varphi' + E_g K_{ww} \bar{w}' &= \bar{M}_w \\ \delta \bar{w} &= 0 \quad \text{または} \\ -E_g K_{ww} \varphi'' + E_{gg} R_{ww} \bar{w}' &= \bar{H}_w \end{aligned} \quad (17) a-f$$

(16)式(17)式において $E_g = E^2/G$, $E_{gg} = E^3/G^2$ であり、また

$$\begin{aligned} J_z &= \int_F \Theta^2 dF & J_w &= \int_F \omega^2 dF & D_{ww} &= \int_F \frac{\Theta}{t} S_w dF \\ D_{ww} &= \int_F \frac{S_w^2}{t^2} dF & K_{ww} &= \int_F B_w \omega dF & R_{ww} &= \int_F B_w^2 dF \\ m_z &= \int_F (P_{yz} \cdot x - P_{zx} \cdot y) dF & m_w &= \int_F P_{zx} \cdot \omega dF \\ \bar{T}_z &= \int_F T_{z2} \cdot r_s dF & \bar{M}_w &= \int_F Q_z \cdot \omega dF & \bar{H}_w &= \int_F \frac{E}{G} Q_z \cdot B_w dF \end{aligned}$$

である。さらに P_{yz} , P_{zx} , P_{xx} は各々分布荷重 P_a の x , y , z 方向成分である。

参考文献 リ 堀江保、櫻庭知徳、薄和正三：薄肉直線杆のせん断変形解析（オリエント工学会要集） 2) 西野他：動力曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材（土木学会論文集 225号） 3) 櫻庭知徳：せん断変形の影響を考慮した剛性マトリックスと薄肉骨組系の解析（橋梁と基礎 74-8） 4) 小松定夫著：薄肉構造物の理論と計算（P258）

(16)式(17)式より重を消却すると、つぎの微分方程式、および境界条件が導かれる。

(微分方程式)

$$\varphi'''' - 2\alpha \varphi'' + \beta^2 \varphi' = -\frac{a_1}{n_1 EJ_w} m_z \quad (18)$$

(境界条件) $z = z_1$ および $z = z_2$ において

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \quad \text{または} \quad \varphi'' - 2\alpha \varphi' + \beta^2 \varphi' = \frac{a_1}{n_1 EJ_w} \bar{T}_z \\ \varphi' &= 0 \quad \text{または} \quad \varphi'' - (2\alpha + a_2) \varphi' = \frac{1}{n_1 EJ_w} (a_1 n_3 \bar{M}_w + m_z) \end{aligned} \quad (19) a, b$$

$$\varphi'' - (2\alpha - a_1) \varphi' + (\beta^2 - \frac{a_1 a_3 n_2}{n_1}) \varphi' = \frac{1}{n_1 EJ_w} m_z' \quad \text{または}$$

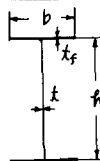
$$\varphi'' - (2\alpha - a_1) \varphi' = \frac{1}{n_1 EJ_w} (m_z + a_1 a_4 n_3 \bar{H}_w) \quad (20) a, b$$

$z = z'$

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 - \frac{a_2 a_5}{a_1} & n_2 &= 1 + \frac{a_2 a_3}{a_1} & n_3 &= 1 + \frac{a_2}{a_1} \\ 2\alpha &= \frac{1}{n_1} (a_1 + a_3 + 2a_4 a_5) & \beta^2 &= \frac{1}{n_1} (a_1 a_3 - a_2 a_4 a_5) \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{G D_{ww}}{E R_{ww}} \quad a_2 = \frac{G D_{ww}}{E K_{ww}} \quad a_3 = \frac{G J_z}{E J_w} \quad a_4 = \frac{G K_{ww}}{E R_{ww}} \quad a_5 = \frac{D_{ww}}{J_w}$$

4. 数値計算例



左図の2軸対称I形断面を用い、単純支持梁の中央に集中ねじり荷重が作用したときの載荷点のねじり角について微分方程式および剛性法によって解を求めた。

$b = 50 \text{ cm}$, $h = 100 \text{ cm}$, $t_f = 2 \text{ cm}$, $t = 1 \text{ cm}$ とし、スパン長 $l = 10 \text{ m}$, $E/G = 2.625$ とする。次表のような結果となる。

	せん断変形考慮	せん断変形無視
剛性法 A	0.8633×10^{-7}	0.8575×10^{-7}
剛性法 B	0.8647×10^{-7}	
微分方程式の解	0.8646×10^{-7}	0.8575×10^{-7}

こゝで、剛性法 A は本法により導かれる剛性マトリックスを用いて 12 分節化したときの解、また剛性法 B は文献 3) で導かれている剛性マトリックスを用いて計算したものである。さらに微分方程式の解において、せん断変形と無視したもの（文献 4)）を参照した。