# I-18　薄肉曲線材のせん断変形解析


秋田大学土木工学科　学生員　○長谷部　薫

秋田大学土木工学科　正　員　橡嚢知徳

秋田大学土木工学科　正　員　薄木征三


1. まえがき　本論文では薄肉曲線材のせん断変形を考慮した解析を直線材で研究した理論[1]を拡張適用した。薄肉曲線材のせん断変形を考慮したひずみ場を明示し、仮想仕事の原理によって微分方程式および境界条件を求めた。特別な場合曲率面内変位と曲率面外変位とが分離して夫々独立に解くことができる。本解析においては、せん断変形を無視した変位でひずみ成分を表わしそれによって直応力を求め、応力のつり合い式を満足するように修正して変位場を確定し、新しくせん断ひずみを独立変数に導入して解析を行なった。その際用いた基本的仮定は―[I]断面不変を保持する。[II]薄肉要素の板厚中心面に垂直で部材軸線に平行な面内でのせん断ひずみは無視する。―などである。

2. ひずみ成分の表示

変位とひずみの関係は円柱座標系で表わし

$$\varepsilon_\rho=\frac{\partial\bar{v}}{\partial\rho}\qquad \varepsilon_\theta=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}-v\right)\qquad \varepsilon_\zeta=\frac{\partial\bar{u}}{\partial\zeta}\tag{1}_{a\text{-}c}$$

$$\gamma_{\rho\theta}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\bar{w}}{\rho}\right)\qquad \gamma_{\theta\zeta}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial\zeta}$$

$$\gamma_{\zeta\rho}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial\rho}-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\zeta}\tag{2}_{a\text{-}c}$$

仮定[I]より　$\bar{u}(x,y,z)=u(x,y,z)-y\cdot\varphi(z)$

$$\bar{v}(x,y,z)=v(x,y,z)+x\cdot\varphi(z)\tag{3}_{a\cdot b}$$

解析の便のため薄肉中心線に沿ったS座標、およびそれと直角なn座標を用いるとせん断ひずみは次式になる。

$$\gamma_s=\frac{R_D}{\rho}\left[\frac{\rho^2}{R_D}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\bar{w}}{\rho}\right)+v'\frac{\rho^2}{R_D}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{y}{\rho}\right)+u'\frac{\rho^2}{R_D}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{x}{\rho}\right)+\gamma_s\psi_z\right]\tag{4}$$

$$\gamma_n=\frac{R_D}{\rho}\left[\frac{\rho^2}{R_D}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\bar{w}}{\rho}\right)+v'\frac{\rho^2}{R_D}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{y}{\rho}\right)+u'\frac{\rho^2}{R_D}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{x}{\rho}\right)+\gamma_n\psi_z\right]\tag{5}$$

仮定[II]を式(5)に適用し、nについて積分すると

$$R_D\frac{\bar{w}}{\rho}=-v'R_D\frac{y}{\rho}-u'R_D\frac{x}{\rho}-\frac{R_D^2}{\rho^{*2}}\gamma_n\cdot n\cdot\psi_z+C_0\tag{6}$$

薄肉断面における垂直応力とそれに伴うせん断応力との関係より外力を無視して

$$q_1=Gt\frac{\rho^{*2}}{R_D^2}\gamma_s^*+\frac{1}{R_D^2}\int_{s_1}^{s}\rho^*t\frac{\partial\sigma_\theta^*}{\partial\theta}\,ds\tag{7}$$

式(7)において初め直応力とつり合うせん断変形を無視し、そのときの変位を第1近似値としての添字1を付して表わすと式(4)と、式(7)において$\sigma_\theta^*$を無視すると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\bar{w}_1^*}{\rho^*}\right)=\frac{R_D^2}{\rho^{*3}}\frac{q_1}{Gt}-u_1'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{x^*}{\rho^*}\right)-v_1'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{y^*}{\rho^*}\right)-\frac{R_D}{\rho^{*2}}\gamma_s^*\psi_{z1}\tag{8}$$

式(8)中$q_1$は変位の連続条件 $\oint\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\bar{w}}{\rho}\right)ds=0$ より求まり式(8)をSで積分して、せん断変形を無視した変位で表示した式(6)に代入すると

$$R_D\frac{w_1}{\rho}=C_1-R_D\left(\frac{x}{\rho}-\frac{x_0^*}{\rho^*}\right)u_1'-R_D\left(\frac{y}{\rho}-\frac{y_0^*}{\rho^*}\right)v_1'-\left(\Omega^*+\frac{R_D^2}{\rho^{*2}}\gamma_n\cdot n\right)\psi_{z1}\tag{9}$$

ここで

$$\Omega^*=\int_{s_1}^{s}\left\{\frac{R_D^2}{\rho^{*2}}\cdot\gamma_s^*-\frac{R_D^3q}{\rho^{*3}t}\right\}ds\qquad ここで\quad q=\frac{1}{R_D}\frac{\oint\frac{\gamma_s^*}{\rho^{*2}}ds}{\oint\frac{ds}{\rho^{*3}t}}$$

式(9)の積分定数$C_1$は横断面の原点Dと薄肉断面上の原点Cとの間を厚さt＝0の仮想薄板で結ぶことによりD上の変位$w_1$となる。従って

$$\bar{w}_1=w_1-x\phi_{y1}-y\phi_{x1}-\bar{\omega}\psi_{z1}\tag{10}$$

ここで　$\phi_{x1}=\frac{1}{R_D}\left(\frac{dv_1}{d\theta}+w_1\right)\quad \phi_{y1}=\frac{1}{R_D}\frac{du_1}{d\theta}$

そり関数がつくるそり体積を零になるように$\bar{\omega}$を選ぶと$\bar{\omega}$は次式で与えられる。

$$\omega=\frac{\rho}{R_D}\left\{\Omega^*+\frac{R_D^2}{\rho^{*2}}\gamma_n\cdot n-\frac{1}{F_0}\int_F\left(\Omega^*+\frac{R_D^2}{\rho^{*2}}\gamma_n\cdot n\right)dF\right\}\tag{11}$$

直応力$\sigma_\theta$を求めてひずみ成分の補正を行なう。

$$\sigma_\theta=E\frac{R_D}{\rho}\left(\varepsilon_{z1}-x\kappa_{y1}-y\kappa_{x1}-\omega\vartheta_{z1}\right)\tag{12}$$

式(12)を式(7)に代入し、応力のつり合いを満足すべくひずみの修正を行なうと、式(7)以下同様の手順を繰り返すことにより軸方向変位は次のようになる。

$$\bar{w}_2=w_2-x\phi_{y2}-y\phi_{x2}-\omega\psi_{z2}-\frac{E}{G}\frac{\rho}{R_D}\left(B_f\varepsilon_{z1}'-B_x\kappa_{y1}'-\right.$$
$$\left.-B_y\kappa_{x1}'-B_\omega\vartheta_{z1}'\right)\tag{13}$$

補正されたひずみ成分は

$$\varepsilon_\theta=\frac{R_D}{\rho}\left[\varepsilon_z-x\kappa_y-y\kappa_x-\omega\vartheta_z-\frac{E}{G}\frac{\rho}{R_D}\left(B_x\Gamma_y'+B_y\Gamma_x'+B_\omega\Phi_z'\right)\right]\tag{14}$$

$$\gamma_s=\Theta\psi_z+\frac{E}{Gt}\frac{R_D^2\rho}{\rho^{*3}}\left(S_x\Gamma_y+S_y\Gamma_x+S_\omega\Phi_z\right)\tag{15}$$

ここで

$$\varepsilon_z \equiv \varepsilon_{z2} = \frac{1}{R_D}\left(\frac{dw_2}{d\theta} - v_2\right) \qquad \kappa_x \equiv \kappa_{x2} = \frac{1}{R_D^2}\left(\frac{d^2v_2}{d\theta^2} + \frac{dw_2}{d\theta}\right)$$

$$\kappa_y \equiv \kappa_{y2} = \frac{1}{R_D^2}\left(\frac{d^2u_2}{d\theta^2} + R_D\varphi_2\right) \qquad \iota_z \equiv \iota_{z2} = \frac{1}{R_D}\frac{d\psi_{z2}}{d\theta}$$

$$\phi_{x2} = \frac{1}{R_D}\left(\frac{dv_2}{d\theta} + w_2\right) \qquad \phi_{y2} = \frac{1}{R_D}\frac{du_2}{d\theta} \tag{16}$$

$$\psi_{z2} = \frac{1}{R_D}\left(\frac{d\varphi_2}{d\theta} - \frac{1}{R_D}\frac{du_2}{d\theta}\right) \qquad \Gamma_x = \kappa_{x1}' = \frac{1}{R_D^3}\left(\frac{d^3v_1}{d\theta^3} + \frac{d^2w_1}{d\theta^2}\right)$$

$$\Gamma_y = \kappa_{y1}' = \frac{1}{R_D^3}\left(\frac{d^3u_1}{d\theta^3} + R_D\frac{d\varphi_1}{d\theta}\right) \qquad \Phi_z = \iota_{z1}' = \frac{1}{R_D^3}\left(\frac{d^3\varphi_1}{d\theta^3} - \frac{1}{R_D}\frac{d^3u_1}{d\theta^3}\right)$$

本論文ではせん断ひずみに関連した量 $\Gamma_x$ $\Gamma_y$ $\Phi_z$ を独立な変位成分として新しく導入した。

## 3. 微分方程式と境界条件

式(14)(15)で表わされるひずみ成分を用い仮想仕事の原理によってつり合い方程式および境界条件を求める。

内部ひずみエネルギー $\pi_i$ は $\varepsilon_z, \gamma_{sz}$ 以外のひずみ成分は零だから次式で与えられる。

$$\pi_i = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_F (\sigma_\theta\varepsilon_\theta + \tau_s\gamma_s)\,dF\,d\theta \tag{17}$$

一方外部ひずみエネルギー $\pi_{ex}$ は

$$\pi_{ex} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_F (P_{xd}\bar{u} + P_{yd}\bar{v} + P_{zd}\bar{w})\,dF\,d\theta + \left[\int_F(\bar{\sigma}_\theta\bar{w} + \bar{\tau}_s\xi + \bar{\tau}_n\eta)\,dF\right]_{\theta_1}^{\theta_2} \tag{18}$$

式(14)(15)を式(17)に代入し、$\xi = lu + mv + \gamma_s\varphi$ および式(3)(13)を式(18)に代入し各々変分をとり仮想仕事の原理 $\delta\pi_i - \delta\pi_{ex} = 0$ を適用するとつり合い方程式と境界条件が得られる。特別な場合として断面が $y$ 軸に関して対称な場合のつり合い方程式を示すと次式になる。

$$Z_x = Z_y = J_{xy} = C_x = K_{fy} = K_{fw} = K_{xy} = K_{xw} = R_{xy} = R_{xw} = D_{xy} = D_{xw} = D_{sx} = 0$$

$$-EFR_D\varepsilon_z' - EJ_y\kappa_x' + (E_gK_{xx} - E_gK_{fx}R_D)\Gamma_x'' = R_DP_z - m_x \tag{19a}$$

$$-\frac{EF}{R_D}\varepsilon_z + EJ_x\kappa_x'' - E_gK_{xx}\Gamma_x''' - \frac{E_gK_{fx}}{R_D}\Gamma_x' = P_y + m_x' \tag{19b}$$

$$\left(EJ_y - \frac{EC_y}{R_D}\right)\kappa_y'' + \left(EC_y - \frac{EJ_w}{R_D}\right)\psi_z''' - \left(E_gK_{yy} - \frac{E_gK_{wy}}{R_D}\right)\Gamma_y''' - \left(E_gK_{yw} - \frac{E_gK_{ww}}{R_D}\right)\Phi_z''' + \frac{1}{R_D}GJ_z\psi_z' + \frac{1}{R_D}ED_{sy}\Gamma_y' + \frac{1}{R_D}ED_{sw}\Phi_z' = P_x - m_y' - \frac{m_w'}{R_D} \tag{19c}$$

$$EC_y\kappa_y'' + \frac{EJ_y}{R_D}\kappa_y + EJ_w\psi_z''' - \left(GJ_z - \frac{EC_y}{R_D}\right)\psi_z' - \left(\frac{E_gK_{yy}}{R_D} + ED_{sy}\right)\Gamma_y' - \left(\frac{E_gK_{yw}}{R_D} + ED_{sw}\right)\Phi_z' - E_gK_{wy}\Gamma_y''' - E_gK_{ww}\Phi_z''' = m_z + m_w' \tag{19d}$$

$$-E_gK_{fx}\varepsilon_z' + E_gK_{xx}\kappa_x' - E_{gg}R_{xx}\Gamma_x'' + E_gD_{xx}\Gamma_x = h_x \tag{19e}$$

$$E_gK_{yy}\kappa_y' + E_gK_{yw}\psi_z'' - E_{gg}R_{yy}\Gamma_y'' - E_{gg}R_{yw}\Phi_z'' + ED_{sy}\psi_z + E_gD_{yy}\Gamma_y + E_gD_{yw}\Phi_z = h_y \tag{19f}$$

$$E_gK_{yw}\kappa_y' + E_gK_{ww}\psi_z'' - E_{gg}R_{yw}\Gamma_y'' - E_{gg}R_{ww}\Phi_z'' + ED_{sw}\psi_z + E_gD_{yw}\Gamma_y + E_gD_{ww}\Phi_z = h_w \tag{19g}$$

ここで断面値は次式で定義されるものを用いた。

$$F = R_D\int_F\frac{1}{\rho}dF \quad Z_x = R_D\int_F\frac{y}{\rho}dF \quad Z_y = R_D\int_F\frac{x}{\rho}dF \quad J_x = R_D\int_F\frac{y^2}{\rho}dF$$

$$J_{xy} = R_D\int_F\frac{xy}{\rho}dF \quad J_y = R_D\int_F\frac{x^2}{\rho}dF \quad J_w = R_D\int_F\frac{\omega^2}{\rho}dF \quad C_x = R_D\int_F\frac{y\omega}{\rho}dF$$

$$C_y = R_D\int_F\frac{x\omega}{\rho}dF \quad J_z = \int_F\frac{\rho}{R_D}\Theta^2dF \quad K_{fx} = \int_FB_y\,dF \quad K_{fy} = \int_FB_x\,dF$$

$$K_{fw} = \int_FB_\omega\,dF,\ K_{xy} = \int_Fy\cdot B_x\,dF,\ K_{xx} = \int_Fy\cdot B_y\,dF,\ K_{xw} = \int_Fy\cdot B_\omega\,dF$$

$$K_{yy} = \int_Fx\cdot B_x\,dF,\ K_{yw} = \int_Fx\cdot B_\omega\,dF,\ K_{wy} = \int_F\omega\cdot B_x\,dF,\ K_{wx} = \int_F\omega\cdot B_y\,dF$$

$$K_{ww} = \int_F\omega\cdot B_\omega\,dF,\ D_{yy} = R_D^3\int_F\frac{\rho^3}{\rho^{*6}}\frac{S_x^2}{t^2}dF,\ D_{xy} = R_D^3\int_F\frac{\rho^3}{\rho^{*6}}\frac{S_xS_y}{t^2}dF$$

$$D_{xx} = R_D^3\int_F\frac{\rho^3}{\rho^{*6}}\frac{S_y^2}{t^2}dF,\ D_{yw} = R_D^3\int_F\frac{\rho^3}{\rho^{*6}}\frac{S_xS_\omega}{t^2}dF,\ D_{xw} = R_D^3\int_F\frac{\rho^3}{\rho^{*6}}\frac{S_yS_\omega}{t^2}dF$$

$$D_{ww} = R_D^3\int_F\frac{\rho^3}{\rho^{*6}}\frac{S_\omega^2}{t^2}dF,\ R_{yy} = \int_F\frac{\rho}{R_D}B_x^2\,dF,\ R_{xy} = \int_F\frac{\rho}{R_D}B_xB_y\,dF$$

$$R_{xx} = \int_F\frac{\rho}{R_D}B_y^2\,dF,\ R_{yw} = \int_F\frac{\rho}{R_D}B_xB_\omega\,dF,\ R_{xw} = \int_F\frac{\rho}{R_D}B_yB_\omega\,dF$$

$$R_{ww} = \int_F\frac{\rho}{R_D}B_\omega^2\,dF,\ D_{sy} = R_D\int_F\frac{\rho^2}{\rho^{*3}}\Theta\frac{S_x}{t}dF,\ D_{sx} = R_D\int_F\frac{\rho^2}{\rho^{*3}}\Theta\frac{S_y}{t}dF$$

$$D_{sw} = R_D\int_F\frac{\rho^2}{\rho^{*3}}\Theta\frac{S_\omega}{t}dF,\quad E_g = \frac{E^2}{G},\quad E_{gg} = \frac{E^3}{G^2}$$

また外力荷重は次のように定義されている。

$$P_x = \int_F\frac{\rho}{R_D}P_{xd}\,dF,\ P_y = \int_F\frac{\rho}{R_D}P_{yd}\,dF,\ P_z = \int_F\frac{\rho}{R_D}P_{zd}\,dF$$

$$m_x = \int_F\frac{\rho}{R_D}P_{zd}\cdot y\,dF,\ m_y = -\int_F\frac{\rho}{R_D}P_{zd}\cdot x\,dF,\ m_\omega = \int_F\frac{\rho}{R_D}P_{zd}\cdot\omega\,dF$$

$$m_z = \int_F\frac{\rho}{R_D}(P_{yd}\cdot x - P_{xd}\cdot y)\,dF,\quad h_x = \int_F\frac{E}{G}\frac{\rho^2}{R_D^2}B_x\,dF$$

$$h_y = \int_F\frac{E}{G}\frac{\rho^2}{R_D^2}B_y\,dF,\quad h_\omega = \int_F\frac{E}{G}\frac{\rho^2}{R_D^2}B_\omega\,dF$$

## 4. 剛性マトリックス

ひずみ成分において軸線 $i$－$j$ 上の任意点の変位および新しく置いたパラメーターをつぎのように3次および1次のベキ級数で近似する。

$$u = a_{11} + a_{12}\theta + a_{13}\theta^2 + a_{14}\theta^3,\quad v = a_{21} + a_{22}\theta + a_{23}\theta^2 + a_{24}\theta^3$$

$$w = a_{31} + a_{32}\theta,\quad \varphi = a_{41} + a_{42}\theta + a_{43}\theta^2 + a_{44}\theta^3$$

$$\Gamma_x = a_{51} + a_{52}\theta,\quad \Gamma_y = a_{61} + a_{62}\theta,\quad \Phi_z = a_{71} + a_{72}\theta$$

仮想仕事の原理に基づいて次に示すように20×20の剛性マトリックスが求められる。例えば要素の一部を示すと次式になる。

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & K_{1,10} & \cdots & K_{1,20} \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & & K_{10,10} & & \\ & \text{S.Y.M} & & & \ddots & \\ & & & & & K_{20,20} \end{bmatrix}$$

$$K_{1,1} = \frac{12E}{R_D^3\Phi^3}\left(J_y - \frac{2C_y}{R_D} + \frac{J_w}{R_D^2}\right) + \frac{6GJ_z}{5R_D^3\Phi}$$

$$K_{2,2} = E\left(\frac{13\Phi}{35R_D}F - \frac{12Z_x}{5R_D^2\Phi} + \frac{12J_x}{R_D^3\Phi^3}\right)$$

$$K_{3,3} = E\left\{\left(1 - \frac{\Phi^2}{6} + \frac{\Phi^4}{105}\right)\frac{F}{R_D\Phi} - \frac{\Phi Z_x}{10R_D^2} + \frac{3J_x}{R_D^3\Phi}\right\}$$

$$K_{4,4} = E\left(\frac{R_D\Phi^3}{105}F - \frac{4\Phi}{15}Z_x + \frac{4}{R_D\Phi}J_x\right)$$

$$K_{5,5} = \frac{E}{R_D\Phi}\left(4 - \frac{4}{15}\Phi^2 + \frac{\Phi^4}{105}\right)J_y,\quad K_{6,6} = E\left(\frac{13}{35}\frac{\Phi}{R_D}J_y - \frac{12C_y}{5R_D^2\Phi} + \frac{12J_w}{R_D^3\Phi^3}\right) + \frac{6G}{5R_D\Phi}J_z$$

$$K_{7,7} = E\left(\frac{R_D\Phi^3}{105}J_y - \frac{4\Phi}{15}C_y + \frac{4}{R_D\Phi}J_w\right) + \frac{2R_D\Phi}{15}GJ_z,\quad K_{8,8} = \frac{E_{gg}R_{xx}}{R_D\Phi} + \frac{E_gR_D\Phi D_{xx}}{3}$$

$$K_{9,9} = \frac{E_{gg}R_{yy}}{R_D\Phi} + \frac{E_gR_D\Phi D_{yy}}{3},\quad K_{10,10} = \frac{E_{gg}R_{ww}}{R_D\Phi} + \frac{E_gR_D\Phi D_{ww}}{3}$$

$$K_{11,11} = \frac{12E}{R_D^3\Phi^3}\left(J_y - \frac{2C_y}{R_D} + \frac{J_w}{R_D^2}\right) + \frac{6GJ_z}{5R_D^3\Phi},\quad K_{12,12} = E\left(\frac{13\Phi}{35R_D}F - \frac{12Z_x}{5R_D^2\Phi} + \frac{12J_x}{R_D^3\Phi^3}\right)$$

$$K_{13,13} = E\left\{\left(1 - \frac{\Phi^2}{6} + \frac{\Phi^4}{105}\right)\frac{F}{R_D\Phi} - \frac{\Phi Z_x}{10R_D^2} + \frac{3J_x}{R_D^3\Phi}\right\},\quad K_{14,14} = E\left(\frac{R_D\Phi^3}{105} - \frac{4\Phi}{15}Z_x + \frac{4J_x}{R_D\Phi}\right)$$

$$K_{15,15} = \frac{E}{R_D\Phi}\left(4 - \frac{4}{15}\Phi^2 + \frac{\Phi^4}{105}\right)J_y,\quad K_{16,16} = E\left(\frac{13\Phi}{35R_D}J_y - \frac{12C_y}{5R_D^2\Phi} + \frac{12J_w}{R_D^3\Phi}\right) + \frac{6GJ_z}{5R_D\Phi}$$

$$K_{17,17} = E\left(\frac{R_D\Phi^3}{105}J_y - \frac{4\Phi}{15}C_y + \frac{4J_w}{R_D\Phi}\right) + \frac{2R_D\Phi GJ_z}{15},\quad K_{18,18} = \frac{E_{gg}}{R_D\Phi}R_{xx} + \frac{E_gR_D\Phi}{3}D_{xx}$$

$$K_{19,19} = \frac{E_{gg}}{R_D\Phi}R_{yy} + \frac{E_gR_D\Phi}{3}D_{yy} \qquad K_{20,20} = \frac{E_{gg}}{R_D\Phi}R_{ww} + \frac{E_gR_D\Phi}{3}D_{ww}$$


参考文献　1)堀江、稼農：薄肉直線材のせん断変形解析　土木学会第31回年次学術講演会　2)西野他：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材　土木学会論文報告集 No225